Sur des représentations indécomposables de dimension finie de SL(2). R^2

ALAIN PIARD

Physique-Mathématique
Université de Dijon
BP 138
21004-Dijon Cedex

Abstract. *The problem of indecomposable finite dimensional representations of semi-direct product is considered by means of the simple model* $SL(2, \mathbb{R}) . \mathbb{R}^2$. *We start from the problem of embedding of this semi-direct product into a semi-simple group and from the existence of a dilatation of the semi-direct product in the semi-simple one. So, we are led to the problem of classification of the types of indecomposable representations of* $SL(2, \mathbb{R}). \mathbb{R}^2$. *Then a complete classification of elementary representations (called cyclic) and partial classification of the non-cyclic representations are shown. Finally, some results concerning the problem of embedding and a counter-example on the existence of a relative dilatation are exhibited.*

Resumé. *Le problème des représentations indécompasables de dimension finie d'un produit semi-direct est considéré ici à travers le modèle simple de* $SL(2, \mathbb{R}). \mathbb{R}^2$. *Partant du problème du plongement de ce produit semidirect dans un groupe semi-simple et de l'existence d'une dilatation relative au produit semi-direct dans ce semi-simple, on est ramené au problème de classification des types de représentations indécomposables de* $SL(2, \mathbb{R}). \mathbb{R}^2$. *Après une classification complète des représentations élémentaires (dites cycliques) et partielle de représentations non cycliques, on donne quelques résultats concernant le problème de plongement et on présente un contre-exemple à l'existence d'une dilatation relative.*

INTRODUCTION

La Physique des particules élémentaires contemporaine est à l'origine de

Key-Words: Représentations indécomposables, Produit semi-direct, Dilatation.
1980 Mathematics Subject Classification: *81 C 40.*

certains problèmes mathématiques intéressants concernant les algèbres et groupes de Lie et leurs représentations. Un des problèmes fondamentaux, non résolu jusqu'à ce jour, est celui de l'échelle de masse des particules élémentaires. En 1965 ([1]) il a été plus ou moins prouvé que dans une représentation unitaire irréductible d'un groupe contenant le groupe de Poincaré, le spectre de masse (celui de l'invariant P^2 de Poincaré) est connexe. En d'autres termes, dans ce cas, il ne peut y avoir un spectre de masse discret non trivial. Un résultat semblable est facile à prouver dans un cadre supersymétrique.

L'apparition du groupe conforme comme modèle universel des particules de masse nulle ([2]) a mis en évidence le rôle d'une dilatation relative dans un groupe semi-simple contenant Poincaré. Il est également connu, dans ce cas, que seules les représentations de masse nulle du groupe de Poincaré apparaissent de manière irréductible dans le restriction d'une représentation unitaire, fidèle, irréductible du groupe conforme, tandis que les représentations massives du groupe de Poincaré apparaissent toujours sous forme d'intégrales directes. Les faits que l'on vient de mentionner posent ainsi le problème de l'existence d'une dilatation relative à un produit semi-direct dans un groupe semi-simple le contenant. Dans l'étude des représentations singulières des groupes de Lie semi-simples ([3]) et dans les théories de Jauge, apparaissent certaines représentations indécomposables des groupes de Lie. Ces représentations (ainsi que le triplet de Gupta Bleuer qui les complètent) sont construites comme extensions de représentations unitaires de certains groupes de Lie et notamment, dans le modèle habituel, de celles de Poincaré. L'analogue de dimension finie (non unitaire) sera constitué par les représentations indécomposables de dimension finie des produits semi-directs. Ce sont précisément ces dernières qui nous seront utiles pour résoudre les problèmes de plongement et d'existence d'une dilatation relative à un produit semi-direct dans un groupe semi-simple le contenant. Beaucoup d'auteurs ont étudié les représentations indécomposables ([4] [5]) et en particulier celles de dimension infinie de $SL(2, C)$ ([6] [7]) en utilisant des techniques variées. Nous nous proposons d'abord dans cet article d'étudier des représentations indécomposables de dimension finie d'un modèle simple d'une algèbre de Lie produit semi-direct $sl(2). \boldsymbol{a}$ (où $\boldsymbol{a}$ est un idéal abélien de dimension 2 et le produit semi-direct défini par la représentation irréductible de dimension 2 de $sl(2)$), en utilisant des techniques standards ([8] [9]).

Plus précisément, on est parti du problème suivant: Etant donné une injection de l'algèbre de Lie $sl(2). \boldsymbol{a}$ dans une algèbre de Lie semi-simple g_1, existe-t-il dans g_1 une dilatation par rapport à $sl(2). \boldsymbol{a}$, c'est à dire un élément D commutant avec $sl(2)$ tel que $[DP] = P\ \forall P \in \boldsymbol{a}$. Comme on le montre dans la dernière partie, on voit facilement que pour des injections $sl(2). \boldsymbol{a} \subset g_1 \subset g_2$ l'existence d'une dilatation dans g_1 est équivalente à l'existence d'une dilatation dans g_2. D'autre part, d'après le théorème d'Ado, pour chaque injection $sl(2). \boldsymbol{a} \subset \boldsymbol{g}_1$, il existe une injection $sl(2). \boldsymbol{a} \subset \boldsymbol{g}_1 \subset sl(n)$. Enfin, pour une représentation π réductible de dimension finie n de $sl(2). \boldsymbol{a} : \pi = \pi_1 \oplus \pi_2$, on obtient une injection $sl(2). \boldsymbol{a} \subset \subset sl(n_1) \oplus sl(n_2) \subset sl(n)$ et l'existence d'une dilatation dans $sl(n)$ est évidemment équivalente à l'existence de dilatations dans $sl(n_1)$ et $sl(n_2)$. C'est pourquoi nous sommes conduits naturellement à l'étude des représentations indécomposables de dimension finie de $sl(2). \boldsymbol{a}$.

Pour une représentation π de dimension finie de $sl(2). \boldsymbol{a}$ sur une espace vectoriel E, on note $\varphi(E) = \pi(P_1)E + \pi(P_2)E$ où P_1 et P_2 sont les générateurs de $\boldsymbol{a}$. Ce sous-espace $\varphi(E)$ est invariant par $sl(2). \boldsymbol{a}$ et on appelle sous-espace générateur de la représentation tout sous-espace E_0 invariant par $sl(2)$, supplémentaire de $\varphi(E)$ dans $E : E = E_0 \oplus \varphi(E)$.

La complexité de la representation dépend de E_0.

Dans la première partie, on construit toutes les représentations indécomposables cycliques de dimension finie de $sl(2). \boldsymbol{a}$: c'est à dire celles pour lesquelles E_0 est irréductible pour $sl(2)$. A chaque classe d'équivalence de représentations indécomposables, on associe bijectivement un schéma indépendant du sous-espace générateur. Dans la seconde partie, on aborde le cas des représentations non cycliques. On constate sur des exemples très simples que la notion de schéma dépend cette fois du sous-espace générateur. On commence donc par montrer qu'il est possible de choisir de «bons» sous-espaces générateurs. On caractérise ensuite les représentations indécomposables de $sl(2). \boldsymbol{a}$ dont le sous-espace générateur est formé de deux composantes irréductibles pour $sl(2)$. Cette caractérisation est obtenue à l'aide d'une famille de relations d'ordre définies sur l'ensemble des classes de représentations cycliques. On donne ensuite deux propriétés générales: on détermine toutes les représentations indécomposables d'ordre 2 (telles que $\varphi^2(E) = \{0\}$) et on montre que toutes les représentations d'ordre $p (\varphi^p(E) = \{0\})$ à p niveaux (dont les dimensions des composantes irréductibles pour $sl(2)$ sont $n, (n+1), \ldots, (n+p-1)$ sont sommes directes de représentations cycliques d'ordre p à p niveaux.

Dans le paragraphe suivant, à l'aide des relations d'ordre et des «bons» sous-espaces générateurs précédemment définis, on établit des critères de réductiblilité des représentations de $sl(2). \boldsymbol{a}$. Cette deuxième partie se termine par la construction de toutes les représentations indécomposables de $sl(2). \boldsymbol{a}$ à 4 niveaux au plus.

Dans la troisième partie, on étudie les injections de $sl(2). \boldsymbol{a}$ dans une algèbre de Lie semi-simple. On donne une description de toutes les injections de $sl(2). \boldsymbol{a}$ dans $sl(n)$ pour $n \leqslant 6$. On prouve ensuite une propriété générale (lemme 4) pour la recherche d'algèbres de Lie semi-simples contenant un produit semi-direct $\boldsymbol{g}. \boldsymbol{a}$ vérifiant certaines conditions. On en déduit que pour tout entier impair

$(2n+1)$, il existe une injection $sl(2).\boldsymbol{a} \subset sl(2n+1)$ telle qu'aucune sous-algèbre de Lie semi-simple propre de $sl(2n+1)$ ne contienne $sl(2).\boldsymbol{a}$. On étudie ensuite plusieurs cas particuliers.

Dans la dernière partie, on donne finalement un exemple d'une injection de $sl(2).\boldsymbol{a}$ dans $sl(35)$ telle qu'il n'existe pas de dilatations dans $sl(35)$ par rapport à $sl(2).\boldsymbol{a}$.

I. REPRESENTATIONS INDECOMPOSABLES CYCLIQUES DE DIMENSION FINIE DE sl(2). *a*

Soit $\{H, X, Y\}$ une base de $sl(2)$ et $\{P_1, P_2\}$ une base de l'algèbre abélienne $\boldsymbol{a}$ de sorte que l'algèbre de Lie $\boldsymbol{g} = sl(2).\boldsymbol{a}$ est définie par les relations:

$$\begin{array}{lllll} [H\,X] = 2X & [P_1\,P_2] = 0 & [H\,P_1] = P_1 & [X\,P_1] = 0 & [Y\,P_1] = P_2 \\ [H\,Y] = -2Y & & [H\,P_2] = -P_2 & [X\,P_2] = P_1 & [Y\,P_2] = 0 \\ [X\,Y] = H. & & & & \end{array}$$

Nous noterons π_n la représentation irréductible de dimension $n = 2r+1$ (r entier ou demi-entier) de $sl(2)$ et $\{e_r, e_{r-1}, \ldots, e_{-r}\}$une base canonique de l'espace $\mathbf{C}^n$ portant cette représentation. En identifiant $\pi_n(H)$, $\pi_n(X)$ et $\pi_n(Y)$ avec H, X et Y pour simplifier les notations, on a:

$$He_i = 2ie_i \quad \begin{cases} Xe_i = (r+i+1)e_{i+1} & i \neq r \\ Xe_r = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} Ye_i = (r-i+1)e_{i-1} & i \neq -r \\ Ye_{-r} = 0. \end{cases}$$

Pour une représentation π de $\boldsymbol{g} = sl(2).\boldsymbol{a}$ sur un espace vectoriel E et E' un sous-espace vectoriel de E, nous noterons $\varphi(E')$ le sous-espace vectoriel $\varphi(E') = \pi(P_1)E' + \pi(P_2)E'$.

LEMME 1. *Si π est une représentation de $\boldsymbol{g}$ sur un espace vectoriel E et si E' est un sous-espace vectoriel de E invariant par $sl(2)$, alors $\varphi(E')$ est invariant par $sl(2)$.*

On a $W \in \varphi(E') \Rightarrow W = \pi(P_1)U + \pi(P_2)V$ avec U et $V \in E'$.

Soit $Z \in sl(2)$, on a alors $\pi(Z).W = \pi(Z)\pi(P_1)U + \pi(Z)\pi(P_2)V$ d'où $\pi(Z)W = \pi([Z\,P_1])U + \pi(P_1)(\pi(Z)U) + \pi([Z\,P_2])V + \pi(P_2)(\pi(Z)V)$.

Or $\boldsymbol{a}$ est un idéal et E' est stable par $sl(2)$: d'où le résultat. ∎

LEMME 2. *Si π est une représentation de $\boldsymbol{g}$ sur E de dimension finie, $\pi(P_1)$ et $\pi(P_2)$ sont nilpotents et il existe un entier n tel que $\varphi^n(E) = 0$.*

Des relations $[\pi(H)\pi(P_i)] = \pm\, \pi(P_i)$, il résulte que $\pi(P_1)$ et $\pi(P_2)$ sont nilpotents. D'autre part $\pi(P_1)^p = 0$ et $\pi(P_2)^q = 0$ entrainent $\varphi^{p+q}(E) = 0$ puisque $\pi(P_1)$ et $\pi(P_2)$ commutent. ∎

PROPOSITION. *Une représentation π de $sl(2).\mathbf{a}$ sur E de dimension finie est irréductible si et seulement si $\pi(P_i) = 0$ et la restriction de π à $sl(2)$ est irréductible.*

Soit $E_0 = \{x \in E$ tels que $\pi(P_i)\,x = 0, i = 1$ ou $2\}$ et soit n le plus petit entier tel que $\varphi^n(E) = \{0\}$. On a alors $\varphi^{n-1}(E) \neq \{0\}$ et $\varphi^{n-1}(E) \subset E_0$, donc $E_0 \neq \{0\}$. Or il est clair que E_0 est un sous-espace vectoriel de E invariant par $\pi(sl(2).\mathbf{a})$. L'irréductiblilité de π impose alors $E = E_0$, $\pi(P_i) = 0$ et la restriction de π à $sl(2)$ est irréductible. ∎

LEMME 3. *Si π est une représentation de $sl(2).\mathbf{a}$ sur E et si E_n est un sous-espace de E portant une représentation irréductible de $sl(2)$ de dimension $n = 2r + 1$ et de base canonique $\{e_r, \dots, e_{-r}\}$, alors:*

– soit $P_1 e_r = P_2 e_r = 0$ et $\varphi(E_n) = \{0\}$

– soit $P_1 e_r = 0$, $P_2 e_r \neq 0$ et $\varphi(E_n)$ est un sous-espace de E portant une représentation irréductible de $sl(2)$ de dimension $(n - 1)$ et de base canonique

$$\{P_1 e_{r-1} = -P_2 e_r,\quad P_1 e_{r-2} = -P_2 e_{r-1}, \dots, P_1 e_{-r} = -P_2 e_{-r+1}\}$$

– soit $P_1 e_r \neq 0$, $(2r P_1 - P_1 Y)e_r = 0$ et $\varphi(E_n)$ est un sous-espace de E portant une représentation irréductible de $sl(2)$ de dimension $(n + 1)$ et de base canonique

$$\left\{\frac{P_1 e_r}{2r+1}, \frac{P_1 e_{r-1}}{2r} = P_2 e_r, \dots, \frac{P_1 e_{r-k-1}}{2r-k} = \right.$$

$$\left. = \frac{P_2 e_{r-k}}{k+1}, \dots, P_1 e_{-r} = \frac{P_2 e_{-r+1}}{2r}, \frac{P_2 e_{-r}}{2r+1}\right\}$$

– soit $P_1 e_r \neq 0$ et $(2rP_2 - P_1 Y)\, e_r \neq 0$ et $\varphi(E_n)$ est un sous-espace de E portant une somme directe de deux représentations irréductibles de $sl(2)$ de dimensions $(n - 1)$ et $(n + 1)$ et de bases canonique: $\{P_1 e_r, P_1 e_{r-1} + P_2 e_r, \dots, P_1 e_{r-k} + P_2 e_{r-k+1}, \dots, P_2 e_{-r}\}$ et $\{2rP_2 e_r - P_1 e_{r-1}, \dots, (2r - k) P_2 e_{r-k} - (k + 1) P_1 e_{r-k-1}, \dots, P_2 e_{-r+1} - 2rP_1 e_{-r}\}$.

On sait que $\varphi(E_n)$ est stable par $sl(2)$. Plus précisément, il résulte des relations de commutation les relations suivantes:

$$H(P_1 e_i) = (2i+1)P_1 e_i \qquad H(P_2 e_i) = (2i-1)P_2 e_i$$

$$\begin{cases} X(P_1 e_i) = (r+i+1)P_1 e_{i+1} & i \neq r \quad (1) \\ X(P_2 e_i) = P_1 e_i + (r+i+1)P_2 e_{i+1} & i \neq r \quad (2) \\ X(P_1 e_r) = 0 & \\ X(P_2 e_r) = P_1 e_r & \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y(P_1 e_i) = P_2 e_i + (r-i+1)P_1 e_{i-1} & i \neq -r \quad (3) \\ Y(P_2 e_i) = (r-i+1)P_2 e_{i-1} & i \neq -r \quad (4) \\ Y(P_2 e_{-r}) = 0 & \\ Y(P_1 e_{-r}) = P_2 e_{-r} & \end{cases}$$

– si $P_1 e_r = P_2 e_r = 0$, il résulte de la relation (4) que $P_2 e_i = 0\ \forall i$, puis de (3) que $P_1 e_i = 0\ \forall i$ donc $\varphi(E_n) = 0$.

– $\varphi(E_n)$ est au plus de dimension $2n$ puisqu'il est engendré par $P_1 e_i$ et $P_2 e_i$, $-r \leqslant i \leqslant +r$.

On a $\begin{cases} H(P_1 e_r) = (2r+1)P_1 e_r \\ X(P_1 e_r) = 0 \end{cases}$ donc si $P_1 e_r \neq 0$, $P_1 e_r$ engendre un sous-espace portant une représentation irréductible de $sl(2)$ de dimension $(n+1)$.

Une base canonique de ce sous-espace est: $P_1 e_r$, $Y(P_1 e_r)$, $\dfrac{Y^2(P_1 e_r)}{2!}$, ..., $\dfrac{Y^n(P_1 e_r)}{n!}$ soit: $\{P_1 e_r, P_1 e_{r-1} + P_2 e_r, \ldots, P_1 e_{r-k} + P_2 e_{r-k+1}, \ldots, P_2 e_{-r}\}$.

D'autre part, on a $\begin{cases} H(2rP_2 e_r - P_1 e_{r-1}) = (2r-1)(2rP_2 e_r - P_1 e_{r-1}) \\ X(2rP_2 e_r - P_1 e_{r-1}) = 0. \end{cases}$

Donc, si le vecteur $V = 2rP_2 e_r - P_1 e_{r-1}$ est non nul, il engendre un sous-espace vectoriel de dimension $(n-1)$ portant une représentation irréductible de $sl(2)$ de base canonique $\left\{ V, YV, \dfrac{Y^2 V}{2!}, \ldots, \dfrac{Y^n V}{n!} \right\}$.

Un calcul par récurrence donne $\dfrac{Y^k V}{k!} = (2r-k)P_2 e_{r-k} - (k+1)P_1 e_{r-k-1}$.

Trois cas, autres que $\varphi(E_n) = 0$, peuvent donc se présenter:

ou bien $P_1 e_r \neq 0$ et $(2rP_2 - P_1 Y) e_r \neq 0$ et le sous-espace $\varphi(E_n)$ set alors de dimension $2n$ somme directe des deux sous-espaces engendres par $P_1 e_r$ et $(2rP_2 - P_1 Y)(e_r)$.

ou bien $P_1 e_r = 0$ et $(2rP_2 - P_1 Y) e_r \neq 0$: $\varphi(E_n)$ est alors de dimension $(n-1)$

et porte une représentation irréductible de $sl(2)$ engendrée par $(2rP_2 - P_1\, Y)\boldsymbol{e}_r$.

De la relation $P_1\, e_r = 0$, on déduit $P_1\, e_{r-k} + P_2\, e_{r-k+1} = 0$ et

$$\frac{Y^k\, V}{k!} = (2r+1)P_2\, e_{r-k} = -(2r+1)P_1\, e_{r-k-1}.$$

ou bien $P_1\, e_r \neq 0$ et $(2rP_2 - P_1\, Y)e_r = 0 : \varphi(E_n)$ porte alors une représentation irréductible de $sl(2)$ de dimension $(n+1)$ engendrée par $P_1\, e_r$.

De l'égalité $2rP_2\, e_r = P_1\, e_{r-1}$, il résulte que $P_1\, e_{r-1} + P_2\, e_r = (2r+1)P_2\, e_r = \dfrac{2r+1}{2r} P_1\, e_{r-1}$ puis que $P_1\, e_{r-k} + P_2\, e_{r-k-1} = \dfrac{2r+1}{2r-k} P_1\, e_{r-k+1} = \dfrac{2r+1}{k+1} P_2 e_{r-k}$.

■

Exemples

1) Le cas $P_1\, e_r = P_2\, e_r = 0$ correspond aux représentations irréductibles de $sl(2).\boldsymbol{a}$, irréductibles pour $sl(2)$ et tiviales sur $\boldsymbol{a}$.

2) Considérons les sous-algèbres canoniques $sl(2).\boldsymbol{a}$ de $sl(3)$. Elles définissent deux représentations de dimension 3 de $sl(2).\boldsymbol{a}$ correspondant aux éventualités 2 et 3 du Lemme 3.

Pour la première : $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sur $\mathbf{C}^3$ de base $\{e_1, e_2, e_3\}$, le sous-espace $\{\lambda e_3\}$ est irréductible pour $sl(2)$ de dimension 1 et $\varphi(\{\lambda e_3\})$ est irréductible de dimension 2 engendré par e_1 et e_2.

Nous représentons cette représentation par le schéma $\begin{array}{c} *_2 \\ \uparrow \\ *_1 \end{array}$.

Pour la seconde, H, X et Y sont les mêmes $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ici le sous-espace engendré par e_1 et e_2 est irréductible pour $sl(2)$ de dimension 2:

$$\varphi(\{\lambda e_1 + \mu e_2\}) = \{\lambda e_3\} \qquad \text{et} \qquad \varphi(\{\lambda e_3\}) = \{0\}.$$

Nous représenterons cette représentation par le schéma $\begin{array}{c} *_2 \\ \downarrow \\ *_1 \end{array}$.

3) Pour avoir un exemple de la dernière éventualité, il faut une représentation de dimension 6 au moins et on peut construire explicitement un tel exemple:

$$H = \left(\begin{array}{c|cc|ccc} 0 & & & & & \\ \hline & 1 & & & & \\ & & -1 & & & \\ \hline & & & 2 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & -2 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{c|cc|ccc} 0 & & & & & \\ \hline & 0 & 1 & & & \\ & 0 & 0 & & & \\ \hline & & & 0 & 2 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{c|cc|ccc} 0 & & & & & \\ \hline & 0 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & & \\ \hline & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$P_1 = \left(\begin{array}{c|cc|ccc} 0 & 0 & -1 & & & \\ \hline & & & & & \\ & & & & & \\ \hline & 2 & 0 & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & 0 & 0 & & & \end{array}\right) \quad P_2 = \left(\begin{array}{c|cc|ccc} 0 & 1 & 0 & & & \\ \hline & & & & & \\ & & & & & \\ \hline & 0 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & & \\ & 0 & 2 & & & \end{array}\right)$$

A cette représentation nous associerons le schéma $\begin{tikzcd}[row sep=small] & *_3 \\ {}_2* \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & *_1 \end{tikzcd}$

REMARQUE. Dans la démonstration du Lemme 3, on ne s'est pas servi de la relation $[P_1 P_2] = 0$.

LEMME 4. *Si π est une représentation de* **g** *sur un espace vectoriel E de dimension finie et si E_n est un sous-espace de E portant une représentation irréductible de $sl(2)$ de dimension $n = (2r+1)$ et de base canonique $\{e_r, \ldots, e_{-r}\}$ telle que $P_1 e_r = 0$, alors il existe un entier k_0 tel que:*

— $\varphi^{k_0}(E_n) = 0$

— $\forall k < k_0$, $\varphi^k(E_n)$ porte une représentation de $sl(2)$ de dimension $(n-k)$ et de base canonique $\{P_1^k e_{r-k} = (-1)^k P_2^k e_r, \ldots, P_1^k e_{r-k-i} = (-1)^k P_2^k e_{r-i}, \ldots, P_1^k e_{-r} = (-1)^k P_2^k e_{-r+k}\}$.

On a alors $P_1(P_1 e_{r-1}) = -P_1(P_2 e_r) = -P_2(P_1 e_r) = 0$. On peut donc à nouveau appliquer le lemme 3 et on a: soit $\varphi^2(E_n) = \varphi(E_{n-1}) = 0$ et $k_0 = 2$, soit $\varphi^2(E_n)$ porte une représentation irréductible de $sl(2)$ de dimension $(n-2)$ et de base $\{P_1^2 e_{r-2} = P_2^2 e_r, \ldots, P_1^2 e_{r-2-i} = P_2^2 e_{r-i}, \ldots, P_1^2 e_{-r} = P_2^2 e_{-r+2}\}$. Le résultat est ensuite obtenu par récurrence immédiate. ■

LEMME 5. *Si π est une représentation de $\mathfrak{g}$ sur un espace vectoriel E de dimension finie et si E_n est un sous-espace de E portant une représentation irréductible de $sl(2)$ de dimension $n = (2r+1)$ et de base canonique $\{e_r, \ldots, e_{-r}\}$ telle que $(2r P_2 - P_1 Y) e_r = 0$, alors il existe un entier k_0 tel que:*

– $\varphi^{k_0}(E_n) = \{0\}$

– $\forall k < k_0$, *$\varphi^k(E_n)$ porte une représentation irréductible de $sl(2)$ de dimension $(n+k)$.*

Si $\varphi(E_n) = \{0\}$ le résultat est acquis: $k_0 = 1$.

Si $\varphi(E_n) \neq \{0\}$, d'après le lemme 3, $\varphi(E_n)$ est de dimension $(n+1)$ portant une représentation irréductible de $sl(2)$ de base canonique

$$\left\{\frac{P_1 e_r}{2r+1}, \frac{P_1 e_{r-1}}{2r} = P_2 e_r, \ldots, \frac{P_1 e_{r-k+1}}{2r-k} = \frac{P_2 e_{r-k}}{k+1}, \ldots, \frac{P_2 e_{-r}}{2r+1}\right\}.$$

On a alors $((2r+1)P_2 - P_1 Y)\left(\dfrac{P_1 e_r}{2r+1}\right) = P_1(P_2 e_r) - P_1\left(\dfrac{P_1 e_{r-1}}{2r}\right) = \dfrac{1}{2r} P_1(2rP_2 e_r - P_1 e_{r-1}) = 0$. En appliquant à nouveau le lemme 3 à $E_{n+1} = \varphi(E_n)$, on a: soit $\varphi^2(E_n) = \{0\}$ et $k_0 = 2$, soit $\varphi^2(E_n)$ porte une représentation irréductible de $sl(2)$ de dimension $(n+2)$.

La démonstration s'achève encore par récurrence immédiate. ■

Notation. Nous noterons désormais $\varphi_+(E_n)$ et $\varphi_-(E_n)$ les sous-espaces de $\varphi(E_n)$ engendrés par $P_1 e_r$ et $(2rP_2 - P_1 Y) e_r$ ($\{e_r \ldots e_{-r}\}$ une base canonique de E_n) de sorte que $\varphi(E_n) = \varphi_+(E_n) \oplus \varphi_-(E_n)$ où $\varphi_+(E_n)$ et $\varphi_-(E_n)$ portent des représentations irréductibles de $sl(2)$ de dimension $(n+1)$ et $(n-1)$ lorsqu'ils ne sont pas réduits à 0. Les lemmes 4 et 5 indiquent alors que $\varphi_+(E_n) = \{0\} \Rightarrow \varphi_+(\varphi_-^k(E_n)) = 0\ \forall k$ et $\varphi_-(E_n) = 0 \Rightarrow \varphi_-(\varphi_+^k(E_n)) = 0\ \forall k$.

LEMME 6. *Si π est une représentation de $\mathfrak{g}$ sur un espace vectoriel E de dimension finie et E_n un sous-espace de E portant une représentation irréductible de dimension n de $sl(2)$, on a $\varphi_+(\varphi_-(E_n)) = \varphi_-(\varphi_+(E_n))$.*

Soit $\{e_r, \ldots, e_{-r}\}$ une base canonique de E_n. $\varphi_+(E_n)$ est engendré par $P_1 e_r$ et $\varphi_-(E_n)$ par $(2rP_2 - P_1 Y) e_r$ si $n = 2r+1$. Donc $\varphi_-(\varphi_+(E_n))$ est engendré par

$((2r+1)P_2 - P_1 Y)(P_1 e_r)$ et $\varphi_+(\varphi_-(E_n))$ par $P_1((2rP_2 - P_1 Y)e_r)$.

Or on a $((2r+1)P_2 - P_1 Y)(P_1 e_r) = P_1((2r+1)P_2 e_r - YP_1 e_r) = P_1((2r+ + 1)P_2 e_r - P_1 e_{r-1} - P_2 e_r) = P_1((2rP_2 - P_1 Y)e_r)$. ■

LEMME 7. *Si π est une représentation de* **g** *sur un espace vectoriel E de dimension finie et E_n un sous-espace de E portant une representation irréductible de dimension n de $sl(2)$, il existe un entier k_0 tel que $(\varphi_+ \circ \varphi_-)^{k_0}(E_n) = \{0\}$ et les sous-espace $(\varphi_+ \circ \varphi_-)^k(E_n)$ pour $k = 0, 1, \ldots, k_0 - 1$ sont en somme directe non réduits à $\{0\}$.*

L'existence de k_0 tel que $(\varphi_+ \circ \varphi_-)^k(E_n) \neq \{0\}$ $\forall k < k_0$ et $(\varphi_+ \circ \varphi_-)^{k_0}(E_n) = \{0\}$ résulte du lemme 2 puisque $(\varphi_+ \circ \varphi_-)^k(E_n) \subset \varphi^{2k}(E_n)$.

Tous les sous-espaces $(\varphi_+ \circ \varphi_-)^k(E_n)$, $0 \leqslant k < k_0$, ont même dimension n que E_n. Seuls peuvent être liés, dans ces sous-espaces, des vecteurs de même valeur propre pour H et toute relation de liaison pour une valeur propre donnée implique la même relation pour les autres valeurs propres par action de X et de Y. Soit donc $e_{r,k}$ le vecteur de valeur propre maximale pour H dans $(\varphi_+ \circ \varphi_-)^k(E_n)$ et supposons qu'on ait une relation $\sum_{k=0}^{k_0-1} \lambda_k e_{r,k} = 0$. Soit k_1 le plus petit indice tel que $\lambda_{k_1} \neq 0$, on a alors $e_{r,k_1} \in \sum_{k=k_1+1}^{k_0-1} (\varphi_+ \circ \varphi_-)^k(E_n)$ et $(\varphi_+ \circ \varphi_-)^{k_1}(E_n) \subset \subset \sum_{k=k_1+1}^{k_0-1} (\varphi_+ \circ \varphi_-)^k(E_n)$. On en déduit $(\varphi_+ \circ \varphi_-)^{k_0-1}(E_n) \subset \sum_{k=k_1+1}^{k_0-1} (\varphi_+ \circ \circ \varphi_-)^{k+k_0-k_1-1}(E_n) = \{0\}$ ce qui contredit la définition de k_0. ■

Nous pouvons maintenant construire toutes les représentations cycliques de dimension finie de $sl(2)$. **a**.

DÉFINITION. On appelle sous-espace générateur d'une représentation de dimension finie de $sl(2)$. **a** sur un espace vectoriel E tout supplémentaire de $\varphi(E)$ dans E invariant par $sl(2)$.

Il est clair que de tels sous-espaces existent puisque $sl(2)$ est semi-simple et que $\varphi(E)$ est invariant par $sl(2)$. En outre les représentations de $sl(2)$ sur deux sous-espaces générateurs sont équivalentes.

DÉFINITION. On appelle représentation cyclique de $sl(2)$. **a** toute représentation dont le sous-espace générateur est irréductible pour $sl(2)$.

PROPOSITION. *Si E_0 est un sous-espace générateur d'une représentation de $sl(2)$.* **a** *sur un espace vectoriel E de dimension finie, on a $\varphi(E) = \bigoplus_k \varphi^k(E_0)$.*

On a $E = E_0 \oplus \varphi(E)$ et on sait qu'il existe n tel que $\varphi^n(E_0) = \{0\}$.

Le plus petit sous-espace invariant par $sl(2).\mathbf{a}$ contenant E_0 est alors $E_0 \oplus \oplus \left(\overset{n-1}{\underset{k=1}{\oplus}} \varphi^k(E_0) \right)$ (où la somme est directe d'après le lemme 7).

Soit $x \in \varphi(E) : x = P_1 y + P_2 z$ avec $y \in E$ et $z \in E$. y et z se décomposent:

$$\begin{cases} y = y_0 + y_1 & y_0 \in E_0 & y_1 \in \varphi(E) \\ z = z_0 + z_1 & z_0 \in E_0 & z_1 \in \varphi(E) \end{cases}$$

d'où $x = (P_1 y_0 + P_2 z_0) + (P_1 y_1 + P_2 z_1) \in \varphi(E_0) + \varphi^2(E)$.

Ceci prouve que $\varphi(E) = \varphi(E_0) + \varphi^2(E)$ et $\varphi^k(E) = \varphi^k(E_0) + \varphi^{k+1}(E)$ $\forall k$. On en déduit que $\varphi(E) = \varphi(E_0) + \varphi^2(E_0) + \ldots + \varphi^k(E_0) + \varphi^{k+1}(E)$ $\forall k$ et $E = = E_0 \oplus \overset{n-1}{\underset{k=1}{\oplus}} \varphi^k(E_0)$ puisque $\varphi^n(E_0) = \{0\}$. ■

PROPOSITION. *Si π est une représentation de dimension finie de $\mathbf{g} = sl(2).\mathbf{a}$ sur un espace vectoriel E et E_n un sous-espace de E de dimension n invariant par $sl(2)$, la suite de nombre entiers $(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k)$ où n_i est le plus petit entier tel que $\varphi_+^{n_i}(\varphi_-^{i-1}(E_n)) = \{0\}$ lorsque $\varphi_-^{i-1}(E_n) \neq 0$ est finie, décroissante et telle que $k \leqslant n$.*

La suite est finie puisqu'on sait qu'il existe k tel que $\varphi_-^k(E_n) = \{0\}$ et on a $n_i \geqslant 1$ puisque n_i n'est défini que pour $\varphi^0(\varphi_-^{i-1}(E_n)) = \varphi_-^{i-1}(E_n) \neq \{0\}$.

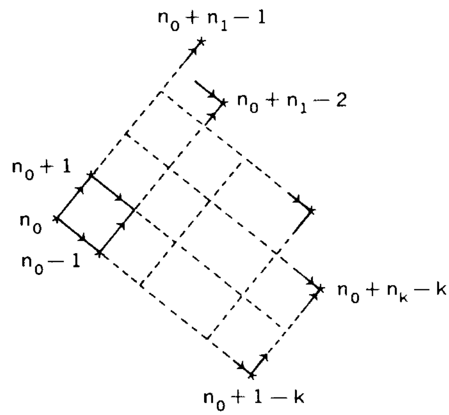
D'autre part, la propriété $\varphi_+^{n_i-1}(\varphi_-^{i-1}(E_n)) \neq \{0\}$ entraine $\varphi_-(\varphi_+^{n_i-1}(\varphi_-^{i-2}(E_n))) \neq \neq \{0\}$ (puisque $\varphi_+ \circ \varphi_- = \varphi_- \circ \varphi_+$) et par suite $\varphi_+^{n_i-1}(\varphi_-^{i-2}(E_n)) \neq 0$ d'où résulte $n_{i-1} \geqslant n_i$. Enfin on a $\varphi_-^{k-1}(E_n) \neq 0$ donc sa dimension $n - (k-1)$ est supérieure à 1. ■

PROPOSITION. *Les suites correspondant à deux sous-espaces générateurs E_0 et E_0' d'une représentation cyclique de dimension finie de $sl(2).\mathbf{a}$ sont identiques et il existe une application F de l'ensemble des classes d'équivalence de représentations cycliques de dimension finie de $sl(2).\mathbf{a}$ dans l'ensemble des suites finies de nombres entiers $(n_0, n_1, \ldots, n_k)$ avec $n_i \geqslant 1$, $n_{i+1} \leqslant n_i$ $\forall i \geqslant 1$ et $k \leqslant n_0$.*

On sait que E_0 et E_0' sont de même dimension n_0 qui est le premier terme de la suite. Les sous-espaces irréductibles pour $sl(2)$ de même dimension n_0 que E_0 sont tous inclus dans $E_0 + \sum_i (\varphi_+ \circ \varphi_-)^i(E_0)$, puisque la dimension de $\varphi_+^p \circ \circ \varphi_-^q(E_0)$ est $n_0 + p - q$. On a donc $E_0' \subset E_0 + \sum_i (\varphi_+ \circ \varphi_-)^i(E_0)$ et $E_0 \subset E_0' + + \sum_i (\varphi_+ \circ \varphi_-)^i(E_0')$.

Il en résulte l'équivalence $\varphi_+^n(\varphi_-^i(E_0)) = \{0\} \Leftrightarrow \varphi_+^n(\varphi_-^i(E_0')) = \{0\} \forall i$, ce qui entraine $n_i = n_i'$ $\forall i \geqslant 1$ si (n_i) et (n_i') sont les suites correspondant à E_0 et E_0'. On peut donc définir une application F qui à toute représentation cyclique de dimension finie de $sl(2)$. $\boldsymbol{a}$ fait correspondre la suite $(n_0, n_1, \ldots, n_k)$ où n_0 est la dimension d'un sous-espace générateur et $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ la suite qui lui correspond. Il est d'autre part évident que les suites associées à deux représentations équivalentes sont identiques, ce qui achève la démonstration. ∎

DÉFINITION. On appelle schéma associé à une représentation cyclique de $sl(2)$. $\boldsymbol{a}$ ayant pour suite associée $(n_0, n_1, \ldots, n_k)$ le schéma suivant:



Chaque point x représente un sous-espace irréductible E pour $sl(2)$. De chaque point $x:E$ part une flèche croissante qui arrive en $\varphi_+(E)$ si $\varphi_+(E) \neq \{0\}$ et une flèche décroissante arrivant en $\varphi_-(E)$ si $\varphi_-(E) \neq \{0\}$. Le point initial n_0x représente un sous-espace générateur et n_0 sa dimension. Il y a n_1 points sur la branche croissante à partir de n_0x, n_2 points sur celle à partir de $(n_0 - 1)x \ldots$ etc. Par la suite, on notera indifférement les flèches de gauche à droite où de droite à gauche.

THÉOREME. *L'application F qui à toute classe d'équivalence de représentations cycliques de dimension finie de $sl(2)$. $\boldsymbol{a}$ fait correspondre une suite $(n_0, n_1, \ldots, n_k)$ (ou le schéma associé) est bijective.*

Il nous reste à démontrer que pour toute suite vérifiant les conditions imposées, il existe une et une seule représentation cyclique dont elle est l'image par F.

Soit donc $(n_0, n_1, n_2, \ldots, n_k)$ une suite de nombres entiers décroissante à partir de n_1 telle que $k \leqslant n_0$ et E l'espace de la représentation que l'on va construire. On doit avoir $E = E_0 \oplus \overset{n_1-1}{\underset{i=1}{\oplus}} \varphi_+^i(E_0) \oplus \overset{n_2-1}{\underset{i=0}{\oplus}} \varphi_+^i(\varphi_-(E_0)) \oplus \ldots \oplus$
$\oplus \overset{n_k-1}{\underset{i=0}{\oplus}} \varphi_+^i(\varphi_-^k(E_0))$.

La représentation de $sl(2)$ sur E est imposée par la suite $(n_0, n_1, \ldots, n_k)$ puisque celle-ci détermine le nombre de composantes irréductibles pour $sl(2)$ d'une dimension donnée. Pour chacun des sous-espaces E_n de cette décomposition de la représentation de $sl(2)$, la suite $(n_0, n_1, \ldots, n_k)$ impose alors $\varphi_+(E_n) \neq \neq \{0\}$ oú $\varphi_+(E_n) = 0$ et $\varphi_-(E_n) \neq \{0\}$ ou $\varphi_-(E_n) = \{0\}$. En outre, les lemmes 3 et 6 indiquent comment P_1 et P_2 doivent nécessairement agir sur des bases canoniques de chaque sous-espace de la décomnosition de la représentation restreinte à $sl(2)$. La seule latitude offerte par les relations établies dans ces lemmes est une homothétie sur chaque sous-espace irréductible pour $sl(2)$ et il est clair que ces transformations conduisent à des représentations équivalentes. Soit $\{e_r, \ldots, e_{-r}\}$ une base canonique d'un sous-espace E_n irréductible pour $sl(2)$, soit $\{V_{r+\frac{1}{2}}, \ldots, V_{-r-\frac{1}{2}}\}$ une base canonique de $\varphi_+(E_n)$ et $\{W_{r-\frac{1}{2}}, \ldots, W_{-r+\frac{1}{2}}\}$ une base canonique de $\varphi_-(E_n)$ où $n = 2r + 1$. Si $\varphi_+(E_n) = \{0\}$, on pose $V_i = 0$ $\forall i$ et de même $W_i = 0$ $\forall i$ si $\varphi_-(E_n) = \{0\}$. On doit avoir:

$$\begin{cases} P_1 e_r = \lambda V_{r+\frac{1}{2}} \qquad P_2 e_{-r} = \lambda V_{r-\frac{1}{2}} \\ P_1 e_k + P_2 e_{k+1} = \lambda V_{k+\frac{1}{2}} \quad \forall k \neq r \\ (r+k+1) P_2 e_{k+1} - (r-k) P_1 e_k = \mu W_{k+\frac{1}{2}} \quad \forall k \neq r \end{cases} \qquad \text{où l'on peut choisir } \lambda = \mu = 1.$$

Ce qui donne
$$P_1 e_k = \frac{1}{2r+1}\left[(r+k+1)\, V_{k+\frac{1}{2}} - W_{k+\frac{1}{2}}\right] \forall k \quad \text{en posant } W_{r+\frac{1}{2}} =$$
$$P_2 e_k = \frac{1}{2r+1}\left[(r-k+1)\, V_{k-\frac{1}{2}} + W_{k-\frac{1}{2}}\right] \forall k \quad = W_{-r-\frac{1}{2}} = 0;$$

Et ces relations sont valables dans tous les cas avec les conventions ci-dessus. Un calcul direct permet alors de vérifier les relations de commutation

$$[H\,P_1](e_k) = P_1 e_k \qquad [X\,P_1](e_k) = 0 \qquad [Y\,P_1](e_k) = P_2 e_k$$
$$[H\,P_2](e_k) = -P_2 e_k \qquad [X\,P_2](e_k) = P_1 e_k \qquad [Y\,P_2](e_k) = 0$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que P_1 et P_2 commutent. Pour cela il nous faut introduire des bases canoniques: $\{V^+_{r+1}, \ldots, V^+_{-r-1}\}$ de $\varphi_+^2(E_n)$, $\{W^-_{r-1}, \ldots, W^-_{-r+1}\}$ de $\varphi_-^2(E_n)$ et $\{\epsilon_r, \ldots, \epsilon_{-r}\}$ de $(\varphi_+ \circ \varphi_-)(E_n)$.

On doit avoir
$$\begin{cases} P_1 V_k + P_2 V_{k+1} = V^+_{k+1} & \forall k \\ \left(r+k+\frac{3}{2}\right) P_2 V_{k+1} - \left(r-k+\frac{1}{2}\right) P_1 V_k = \epsilon_{k+1} & \forall k \\ P_1 W_k + P_2 W_{k+1} = \epsilon_{k+1} & \forall k \\ \left(r+k+\frac{1}{2}\right) P_2 W_{k+1} - \left(r-k-\frac{1}{2}\right) P_1 W_k = W^-_{k+\frac{1}{2}} & \forall k \end{cases}$$

en posant toujours les mêmes conventions. D'où on obtient:

$$P_1 V_k = \frac{1}{2r+2}\left[\left(r+k+\frac{3}{2}\right) V^+_{k+\frac{1}{2}} - \epsilon_{k+\frac{1}{2}}\right]$$

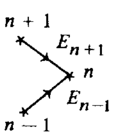
$$P_1 W_k = \frac{1}{2r}\left[\left(r+k+\frac{1}{2}\right) \epsilon_{k+\frac{1}{2}} - W^-_{k+\frac{1}{2}}\right]$$

$$P_2 V_k = \frac{1}{2r+2}\left[\left(r-k+\frac{3}{2}\right) V^+_{k-\frac{1}{2}} + \epsilon_{k-\frac{1}{2}}\right]$$

$$P_2 W_k = \frac{1}{2r}\left[\left(r-k+\frac{1}{2}\right) \epsilon_{k-\frac{1}{2}} + W^-_{k-\frac{1}{2}}\right].$$

Un calcul direct donne alors $P_1 P_2 e_k = P_2 P_1 e_k = \dfrac{(r+1)^2 - k^2}{(2r+1)(2r+2)} V_k^+ + $ $+ \dfrac{k}{2r(r+1)} \epsilon_k - \dfrac{1}{2r(2r+1)} W_k^-$. ∎

REMARQUE. On a ainsi construit et classé toutes les représentations cycliques de dimension finie de l'algèbre de Lie $g = sl(2).\,\boldsymbol{a}$. Ces représentations sont évidemment indécomposables. Mais il est clair qu'il existe des représentations indécomposables non cycliques de $sl(2).\,\boldsymbol{a}$. Par exemple le schéma



définit une représentation indécomposable de $sl(2).\,\boldsymbol{a}$ dont un sous-espace générateur est $E_{n-1} \oplus E_{n+1}$.

De l'étude précédente résulte toutefois une condition nécessaire évidente pour qu'une représentation de dimension finie de $sl(2).\,\boldsymbol{a}$ soit indécomposable.

PROPOSITION. *Si π est une représentation indécomposable de $sl(2).\,\boldsymbol{a}$ sur E de dimension finie, l'ensemble des dimensions des composantes irréductibles de la restriction de π à $sl(2)$ est la forme $\{n, n+1, \ldots, n+p\}$.*

Soient n et $n+p$ les dimensions minimale et maximale des composantes irréductibles de la restriction de π à $sl(2)$. Supposons qu'il n'y ait pas de composante irréductible pour $sl(2)$ de dimension $n+k$ avec $1 \leqslant k \leqslant p-1$.

Soient E_1 la somme des composantes irréductibles pour $sl(2)$ de dimension inférieure à $(n+k)$ et E_2 celle des composantes irréductibles de dimension supérieure à $(n + k)$. E_1 et E_2 sont invariants par $sl(2).\boldsymbol{a}$ et $E = E_1 \oplus E_2$. ∎

Ceci nous conduit à poser la définition suivante:

DÉFINITION. Une représentation π de dimension finie de $sl(2).\boldsymbol{a}$ est dite à p niveaux si sa restriction à $sl(2)$ se décompose en représentations irréductibles de dimensions comprises entre deux entiers n et $n + p - 1$.

On peut également noter les deux propositions évidentes suivantes:

PROPOSITION. *Toute représentation indécomposable cyclique de $sl(2).\boldsymbol{a}$ contient au plus une représentation irréductible pour $sl(2).\boldsymbol{a}$ de dimension donnée.*

PROPOSITION. *Toute représentation quotient d'une représentation cyclique de $sl(2).\boldsymbol{a}$ est cyclique.*

En introduisant la notion naturelle d'ordre d'une représentation, on obtient également quelques propriétés immédiates.

DÉFINITION. On appelle ordre d'une représentation de $sl(2).\boldsymbol{a}$ sur une espace vectoriel E de dimension finie le plus petit entier n tel que $\varphi^n(E) = \{0\}$.

PROPOSITION. *Une représentation de $sl(2).\boldsymbol{a}$ à p niveaux est au plus d'ordre p et il existe p représentations cycliques d'ordre p à p niveaux: $n, n + 1, \ldots, n + p - 1$.*

PROPOSITION. *Une représentation cyclique d'ordre p à p niveaux: $n, (n + 1), \ldots, n + p - 1$, engendrée par E_{n_0} de dimension n_0, contient une et une seule représentation irréductible se $sl(2).\boldsymbol{a}$ qui est de dimension $2n + p - n_0$.*

PROPOSITION. *Une représentation cyclique d'ordre p est au plus à $2p - 1$ niveaux.*

II. ELEMENTS DE CLASSIFICATION DES REPRESENTATIONS INDECOMPOSABLES NON CYCLIQUES DE sl(2).*a*

1. Choix du sous-espace générateur

Rappelons qu'une représentation π de $sl(2).\boldsymbol{a}$ sur un espace vectoriel E est dite indécomposable s'il n'existe pas de décomposition de E en somme directe $E = E_1 \oplus E_2$ où E_1 et E_2 soient invariants par $sl(2).\boldsymbol{a}$ et que les représentations cycliques sont indécomposables. On a appelé sous-espace générateur d'une représentation π sur E tout sous-espace supplémentaire E_0 de $\varphi(E) = P_1 E + P_2 E$ dans E et on a montré que $\varphi(E) = \sum_k \varphi^k(E_0)$.

DÉFINITION. On appelle source d'une représentation π sur E de dimension finie tout sous-espace S irreductible pour $sl(2)$ tel que $S \cap \varphi(E) = \{0\}$.

Tout sous-espace générateur se décompose en somme directe de sources et les repreésentations de $sl(2)$ sur deux sous-espaces générateurs sont équivalentes. Cependant, le choix du sous-espace générateur est essentiel. Il est clair qu'à tout sous-espace générateur décomposé en sources, on peut associer un schéma qui est une association des schémas des représentations cycliques engendrées par les sources. Les deux exemples suivants montrent que:

– d'une part, on peut associer plusieurs schémas à une même représentation suivant le choix du sous-espace générateur.

– d'autre part, à un même schéma peuvent correspondre plusieurs reprén-tations inéquivalentes.

Exemples.

1. Considérons le schéma
$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \bullet \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ E_n & & E'_n \end{tikzcd}$$
. Il est clair qu'il existe un sous-espace $\lambda E_n + \mu E'_n$ tel que $\varphi(\lambda E_n + \mu E'_n) = \{0\}$ et que par conséquent la représentation se décompose suivant
$$\begin{tikzcd} E_{n+1} \arrow[d, dash] \\ E_n \end{tikzcd} \times \lambda E_n + \mu E'_n.$$

2. De même, dans le schéma
$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & E_{n+1} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ E_n & & E'_n \\ & E_{n-1} \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd}$$
, il existe un sous-espace $\lambda_1 E_n + {}$ $+ \mu_1 E'_n$ tel que $\varphi_+(\lambda_1 E_n + \mu_1 E'_n) = 0$ et un sous-espace $\lambda_2 E_n + \mu_2 E'_n$ tel que $\varphi_-(\lambda_2 E_n + \mu_2 E'_n) = 0$. Si ces deux sous-espaces sont distincts, le changement de sous-espace générateur fait appraitre la décomposition:

$$\begin{tikzcd} E_{n+1} \arrow[d, dash] \\ \lambda_2 E_n + \mu_2 E'_n \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} \lambda_1 E_n + \mu_1 E'_n \arrow[d, dash] \\ E_{n-1} \end{tikzcd}$$

. S'ils sont identiques, on obtient: $\lambda E_n + \mu E'_n \times$
$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & E_{n+1} \\ E_n \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\ & E_{n-1} \end{tikzcd}$$

Et on voit ici que le schéma initial peut correspondre à deux représentations inéquivalentes de $sl(2)$.

Nous allons montrer qu'il est possible de choisir à priori des sous-espaces générateurs faisant apparaitre automatiquement les décompositions de ce type de représentations.

DÉFINITION. Etant donné une représentation π de $sl(2).\,\boldsymbol{a}$ sur E de dimension finie et une suite croissante de sous-espaces invariants par $sl(2).\,\boldsymbol{a}$: $N_1 \subset N_2 \subset \subset \ldots \subset N_n = E$, on appelle sous-espace générateur associé à la suite N_i un sous--espace générateur E_0 ayant une décomposition $E_0 = E_{0,0} \oplus E_{0,1} \oplus \ldots \oplus E_{0,n-1}$, telle que $E_{0,i}$ est invariant par $sl(2)$ et telle que

$$\begin{cases} N_i = E_{0,0} \oplus E_{0,1} \oplus \ldots \oplus E_{0,i-1} \oplus (N_i \cap \varphi(E)) \\ \text{et} \\ N_i \cap (E_{0,i} \oplus E_{0,i+1} \oplus \ldots \oplus E_{0,n-1} \oplus \varphi(E)) \subset \varphi(E) \end{cases}$$

PROPOSITION. *Pour toute représentation π de $sl(2).\,\boldsymbol{a}$ sur E de dimension finie et toute suite croissante de sous-espaces invariants par $sl(2).\,\boldsymbol{a}$: $N_1 \subset N_2 \subset \ldots \subset \subset N_n = E$, il existe un sous-espace générateur associé à la suite N_i.*

On considère $N_1 \cap \varphi(E)$ et on en choisit un supplémentaire $E_{0,0}$ dans N_1 de sorte que $N_1 = E_{0,0} \oplus (N_1 \cap \varphi(E))$. On considère ensuite $N_2 \cap \varphi(E)$, on a

$$\begin{cases} E_{0,0} \cap (N_2 \cap \varphi(E)) = 0 \qquad (\text{puisque } E_{0,0} \cap (N_2 \cap \varphi(E)) \subset N_1 \cap \varphi(E)) \\ \text{et} \\ E_{0,0} \subset N_2. \end{cases}$$

On peut donc choisir $E_{0,1}$ dans N_2 tel que $N_2 = E_{0,0} \oplus E_{0,1} \oplus (N_2 \cap \varphi(E))$.

Supposons par hypothèse de récurrence qu'on ait trouvé $E_{0,0}, E_{0,1}, \ldots, E_{0,k-1}$ tels que $N_k = E_{0,0} \oplus E_{0,1} \oplus \ldots \oplus E_{0,k-1} \oplus (N_k \cap \varphi(E))$. On considère alors $N_{k+1} \cap \varphi(E)$.

On a $$\begin{cases} (E_{0,0} \oplus E_{0,1} \oplus \ldots \oplus E_{0,k-1}) \cap (N_{k+1} \cap \varphi(E)) = 0 \\ \text{et} \qquad\qquad (\text{puisqu'inclus dans } N_k \cap \varphi(E)). \\ (E_{0,0} \oplus \ldots \oplus E_{0,k-1}) \subset N_{k+1} \end{cases}$$

On peut donc choisir $E_{0,k}$ dans N_{k+1} tel que $N_{k+1} = E_{0,0} \oplus \ldots \oplus E_{0,k} \oplus \oplus (N_{k+1} \cap \varphi(E))$. Comme $N_n = E$, on en déduit que $E = E_{0,0} \oplus E_{0,1} \oplus \ldots \oplus \oplus E_{0,n-1} \oplus \varphi(E)$.

Soit alors $V \in N_k \cap (E_{0,k} \oplus \ldots \oplus E_{0,n-1} \oplus \varphi(E))$

$$\begin{cases} V = x_k + x_{k+1} + \ldots + x_{n-1} + y \quad \text{avec} \quad x_{k+i} \in E_{0,k+i} \ \forall i \quad \text{et} \quad y \in \varphi(E) \\ \text{et} \\ V = x_0 + x_1 + \ldots + x_{k-1} + z \qquad \text{avec} \quad x_i \in E_{0,i} \ \forall i \qquad \text{et} \quad z \in \varphi(E) \cap N_k \end{cases}$$

D'où $x_0 + x_1 + \ldots + x_{k-1} - x_k - x_{k+1} \ldots - x_{n-1} - (y - z) = 0$, ce qui prouve que $x_i = 0\ \forall i$ et $y = z = V \in \varphi(E)$.

Nous allons maintenant choisir de «bonnes» suites croissantes de sous-espaces invariants par $sl(2)$.

Soient $\mathscr{A}$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations cycliques de $sl(2).\boldsymbol{a}$ et $\mathscr{A} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{A}_i$ une partition de $\mathscr{A}$ en sous-ensembles contenant un nombre fini d'éléments ($\mathscr{A}_i \cap \mathscr{A}_j = \phi\ \forall i \neq j$).

Notation. Pour une représentation de $sl(2).\boldsymbol{a}$ sur un espace vectoriel E et un sous-espace vectoriel F de E, on note $\psi(F)$ le plus petit sous-espace de E contenant F invariant par $sl(2).\boldsymbol{a}$.

Pour une représentation π sur un espace vectoriel E, on peut alors considérer la suite des sous-espaces $N_i = \Sigma\ \psi(E_k)$ où les E_k sont les sous-espaces de E irréductibles pour $sl(2)$ engendrant une représentation de $sl(2).\boldsymbol{a}$ appartenant à $\bigcup_{j=1}^{i} \mathscr{A}_j$. De façon évidente, N_i est stable par $sl(2).\boldsymbol{a}$ et $N_i \subset N_{i+1}\ \forall i$.

A toute partition de $\mathscr{A}$, on peut donc associer une suite N_i et un sous-espace générateur. ■

DÉFINITION. Une représentation sur E de dimension finie est de longueur n relativement à la partition $\mathscr{A} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{A}_i$ si $N_i \neq E\ \ \forall i < n$ et $N_n = E$ et elle est strictement de longueur n si $N_i \subset \varphi(E)\ \ \forall i < n$ et $N_n = E$.

En particulier une représentation cyclique est strictement de longueur n si elle appartient à $\mathscr{A}_n$. Et toute représentation de dimension finie strictement de longueur n admet un sous-espace générateur formé de sources strictement de longueur n.

PROPOSITION. *Dans une représentation sur E, strictement de longueur n relativement à une partition $\mathscr{A} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{A}_i$, toutes les sources sont de longueur supérieure ou égale à n.*

En effet, si F est un sous-espace de E engendrant une représentation de longueur $k < n$, on a $F \subset N_k \subset \varphi(E)$. ■

DÉFINITION. Un sous-espace générateur décomposé $E_0 = E_{0,0} \oplus E_{0,1} \oplus \ldots \oplus E_{0,n}$ est proprement associé à une partition $\mathscr{A} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{A}_i$ s'il est associé à la suite N_i correspondante et si la sous-représentation sur $\psi(E_{0,i})$ est strictement de longueur $i + 1$.

PROPOSITION. *Pour toute partition* $\mathscr{A} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{A}_i$, *il existe des sous-espaces générateurs proprement associés.*

En effet, on a $N_1 = \Sigma\ \psi(E_k)$ où les E_k sont irréductibles pour $sl(2)$ et engendrent des représentations de $\mathscr{A}_1$. Donc on peut choisir un supplémentaire $E_{0,0}$ de $N_1 \cap \varphi\ (E)$ dans N_1 qui soit somme directe de sous-espaces E_k engendrant des représentations de $\mathscr{A}_1$.

Puis par récurrence, on a $N_i = \Sigma\ \psi(E_k)$ où E_k engendre une représentation de $\bigcup_{j=1}^{i} \mathscr{A}_j\ \forall k$.

On a $N_i = N_{i-1} + \sum_{\psi(E_k) \in \mathscr{A}_i} \psi(E_k)$ avec $N_{i-1} = (E_{0,0} \oplus \ldots \oplus E_{0,i-2}) \oplus (N_{i-1} \cap \cap \varphi(E))$ et on peut choisir un supplémentaire de $(E_{0,0} \oplus \ldots \oplus E_{0,i-2}) \oplus (N_i \cap \cap \varphi(E))$ (sous-espace contenant N_{i-1}) dans N_i formé de sous-espaces E_k engendrant des représenataions de $\mathscr{A}_i$.

La représentation ainsi définie sur $\psi(E_{0,i})$ est strictement de longueur $i + 1$. Soit en effet F un sous-espace de $\psi(E_{0,i})$ irréductible pour $sl(2)$ et supposons que $F \subset N_k$ avec $k < i + 1$. On a alors
$$\begin{cases} F \subset \psi(E_{0,i}) \subset E_{0,i} \oplus \varphi(E) \\ \text{et} \\ F \subset N_k \subset N_i \end{cases}$$
donc $F \subset N_i \cap (E_{0,i} \oplus \varphi(E)) \subset \varphi(E)$.

On a donc
$$\begin{cases} \psi(E_{0,i}) \cap N_k \subset \varphi(E)\ \forall k < i + 1 \text{ puisque } E_{0,i} \text{ est somme directe} \\ \text{et} \\ \psi(E_{0,i}) \cap N_{i+1} = \psi(E_{0,i}) \end{cases}$$
de sources appartenant à N_{i+1}. ∎

La propriété suivante donne tout l'intérêt de la notion précédente:

PROPOSITION. *Si* $E_0 = E_{0,0} \oplus E_{0,1} \oplus \ldots \oplus E_{0,n}$ *est un sous-espace générateur proprement associé à une partition* $\mathscr{A} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{A}_i$ *et si* $E_{0,i} = S_1 \oplus \ldots \oplus S_p$ *est une décomposition en sources de longueur* $(i + 1)$ *de* $E_{0,i}$, *il n'existe pas de source* S'_k *de longueur* $\leqslant i$ *telle que* $E_{0,0} \oplus \ldots \oplus E_{0,i-1} \oplus (S_1 \oplus \ldots \oplus S_{k-1} \oplus S'_k \oplus S_{k+1} \ldots \ldots \oplus S_p) \oplus E_{0,i+1} \oplus \ldots \oplus E_{0,n}$ *soit générateur.*

En effet, si une telle source S'_k existait, on aurait

$$\begin{cases} S'_k \cap (E_{0,0} \oplus \ldots \oplus E_{0,i-1} \oplus \varphi(E)) = \{0\} \\ \text{et} \\ S'_k \subset N_i \end{cases}$$ et ceci est impossible puisque

$$N_i = (E_{0,0} \oplus \ldots \oplus E_{0,i-1}) \oplus (N_i \cap \varphi(E)).$$ ■

Exemple 1: Considérons la partition $\mathscr{A} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{A}_i$ où $\mathscr{A}_i$ est l'ensemble des représentations cycliques d'ordre i. La suite correspondante de sous-espaces vectoriels invariants est $N_i = \operatorname{Ker} \varphi^i$ et la longueur d'une représentation n'est autre que sont ordre.

PROPOSITION. *Pour une représentation de dimension finie, tout sous-espace générateur associé à la partition de $\mathscr{A}$ définie par l'ordre est proprement associé.*

Soit $E_0 = E_{0,0} \oplus \ldots \oplus E_{0,n-1}$ un sous-espace générateur associé à la suite $\operatorname{Ker} \varphi \subset \operatorname{Ker} \varphi^2 \subset \ldots \subset \operatorname{Ker} \varphi^n = E$ pour une représentation π sur E de dimension finie et d'ordre n. On a $E_{0,k} \subset \operatorname{Ker} \varphi^{k+1}$, donc la sous-représentation sur $\psi(E_{0,k})$ est d'ordre $k + 1$. D'autre part, si on a $\begin{cases} E_i \subset \psi(E_{0,k}) \subset E_{0,k} \oplus \varphi(E) \\ \text{et} \\ \varphi^k(E_i) = \{0\} \end{cases}$

(E_i un sous-espace irréductible pour $sl(2)$), cela entraine

$$E_i \subset \operatorname{Ker} \varphi^k \cap (E_{0,k} \oplus \varphi(E)) \subset \varphi(E).$$

Donc la sous-représentation de $sl(2)$. $\boldsymbol{a}$ sur $\psi(E_{0,k})$ est strictement d'ordre $(k + 1)$. ■

Example 2. Considérons sur $\mathscr{A}$ la relation d'ordre $\alpha \mathscr{R} \beta \Leftrightarrow \alpha$ est équivalente à un quotient de β. Soit $\mathscr{A}_{\mathscr{R},1}$ l'ensemblre des éléments minimaux de $\mathscr{A}$ pour $\mathscr{R}$ puis par récurrence $\mathscr{A}_{\mathscr{R},n}$ l'ensemble des éléments minimaux de $\mathscr{A} - \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathscr{A}_{\mathscr{R},i}$.

Dans un sous-espace générateur proprement associé à cette partition $\mathscr{A} = \bigcup \mathscr{A}_{\mathscr{R},n}$ il ne sera pas possible de remplacer une source S par une autre source S' engendrant une représentation qui soit équivalente à un quotient de celle engendrée par S. En reprenant les exemples proposés au début de cette partie II, on constate que le choix d'un sous-espace générateur de ce type fait apparaître les décompositions des deux représentations.

Exemple 3. On peut considérer la partition de $\mathscr{A}$ définie par l'intersection des deux précédentes $\mathscr{A}_1 = \bigcup_i (\mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_{\mathscr{R},i}) \ldots \mathscr{A}_n = \bigcup_i (\mathscr{A}_n \cap \mathscr{A}_{\mathscr{R},i})$ en prenant l'ordre l'exicographique puisqu'il est clair que chacune des réunions $\mathscr{A}_k = \bigcup_i (\mathscr{A}_k \cap \mathscr{A}_{\mathscr{R},i})$ comporte un nombre fini d'ensembles.

Exemple 4. On peut prendre une partition maximale de $\mathscr{A}$, c'est à dire telle que dans chaque $\mathscr{A}_n$, il n'y a qu'une classe d'équivalence de représentations cycliques.

Ceci nous amène naturellement à introduire la notion de finesse.

DÉFINITION. Une partition $\mathscr{A} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{A}'_i$ est dite plus fine qu'une partition $\mathscr{A} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{A}_i$ si pour tout $\mathscr{A}'_i$ il existe j tel que $\mathscr{A}'_i \subset \mathscr{A}_j$ et si pour tout α et β tels que $\alpha \in \mathscr{A}_i$ et $\beta \in \mathscr{A}_j$ avec $i < j$ on a $\alpha \in \mathscr{A}'_k$ et $\beta \in \mathscr{A}'_l$ avec $k < l$.

En particulier, on dira qu'une partition (ou un sous-espace générateur associé) respecte l'ordre si elle est plus fine que celle définie par l'ordre (exemple 1) et respecte le quotient si elle est plus fine que celle définie par la relation $\mathscr{R}$ (exemple 2).

La partition définie dans l'exemple 3 respecte l'ordre et le quotient.

2. Caractérisation des représentations indécomposables de dimension finie de sl(2). *a* engendrées par deux sources (deux sous-espaces irréductibles pour sl(2))

LEMME 1. *Etant donné deux sous-espaces invariants E_1 et E_2 d'une représentation de dimension finie de $sl(2)$. **a**, on a $E_1 \cap E_2 \neq \{0\}$ si et seulement si $E_1 \cap E_2$ contient une sous-représentation irréductible de $sl(2)$. **a**.*

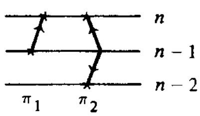
En effet $E_1 \cap E_2$ est stable de dimension finie, donc il existe n tel que $\varphi^n(E_1 \cap E_2) = \{0\}$ et $\varphi^{n-1}(E_1 \cap E_2) \neq \{0\}$ et $\varphi^{n-1}(E_1 \cap E_2)$ est somme directe de représentations irréductibles de $sl(2)$. ■

Il est alors clair que pour un sous-espace générateur $E_0 = S_1 \oplus S_2$, une condition nécessaire pour avoir une représentation indécomposable est que $\psi(S_1) \cap \psi(S_2)$ contienne une composante irréductible pour $sl(2)$. ***a***. Nous allons maintenant définir sur l'ensemble $\mathscr{A}$ des représentations cycliques une famille de relations d'ordre qui nous permettra d'obtenir la caractérisation annoncée.

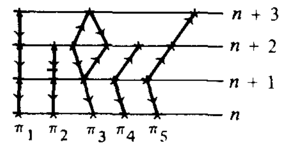
DÉFINITION. Une représentation cyclique π_1 absorbe une représentation cyclique π_2 au niveau n si π_1 et π_2 contiennent des composantes irréductibles $E_{n,1}$ et $E_{n,2}$

de dimension n pour $sl(2).\,\boldsymbol{a}$ et s'il existe une sous-représentation de π_1 contenant $E_{n,1}$ équivalente à un quotient de π_2 par un sous-espace ne contenant pas $E_{n,2}$.

Exemples



π_1 absorbe π_2 au niveau n



π_i absorbe π_{i+k} au niveau n.

PROPOSITION. *Une représentation cyclique π de $sl(2).\,\boldsymbol{a}$ ayant une composante irréductible E_n de niveau n pour $sl(2).\,\boldsymbol{a}$, absorbe au niveau n toutes ses sous-représentations contenant E_n. et est absorbée au niveau n par tout quotient de π par un sous-espace invariant ne contenant pas E_n.*

Cela résulte directement de la définition. ∎

PROPOSITION. *La relation d'absorption au niveau n est une relation d'ordre.*

Elle est reflexive puisque toute représentation est équivalente à son quotient par $\{0\}$. Elle est transitive. Soient π_1, π_2, π_3 des représentations cycliques de $sl(2).\,\boldsymbol{a}$ sur E_1, E_2, E_3 ayant des composantes irréductibles de niveau n: $E_{n,1}$, $E_{n,2}$, $E_{n,3}$ et telles que π_1 absorbe π_2 et π_2 absorbe π_3 au niveau n. Il existe donc $E_1' \subset E_1$ et $E_2'' \subset E_2$ tels que la sous-représentation sur E_1' est équivalente à la représentation quotient sur E_2/E_2'' avec $E_{n,1} \subset E_1'$ et $E_{n,2}/E_2'' \neq \{0\}$ (puisque $E_{n,2} \cap E_2'' = \{0\}$), ces deux sous-espaces se correspondant dans l'équivalence.
De même, il existe $E_2' \subset E_2$ et $E_3'' \subset E_3$ avec $E_{n,2} \subset E_2'$ et $E_3'' \cap E_{n,3} = \{0\}$ tels que la sous-représentation de π_2 sur E_2' est équivalente à la représentation induite sur E_3/E_3'' (avec équivalence entre $E_{n,2}$ et $E_{n,3}/E_3''$). La sous-représentation de π_2 sur $E_2' \cap E_2''$ est donc équivalente à une sous-représentation sur un sous-espace $\bar{E}_3'$ du quotient E_3/E_3''. On a donc sur le quotient $E_2'/E_2' \cap E_2''$ une représentation équivalente à celle induite sur le quotient $E_3/E_3''/\bar{E}_3'$ elle-même équivalente à la représentation sur le quotient $E_3/P_3^{-1}(\bar{E}_3')$ (P_3 la surjection canique de E_3 sur E_3/E_3''). Or la représentation induite par π_2 sur $E_2'/E_2' \cap E_2''$ est une sous-représentation de celle induite sur E_2/E_2'' qui est équivalente à une sous-représentation de π_1: on a finalement trouvé une sous-représentation de π_1 équivalente à la représentation induite par π_3 sur le quotient $E_3/P_3^{-1}(\bar{E}_3')$. En outre, on a $E_{n,2}/E_2' \cap E_2'' \neq 0$ auquel correspond $E_{n,1}$ par la première équivalence.

Donc $E_{n,1}$ est inclus dans le sous-espace de la sous-représentation obtenue de π_1 et par conséquent $E_{n,3} \cap P_3^{-1}(\bar{E}_3') = \{0\}$ (puisqu'il y a unicité du sous-espace de dimension n, irréductible pour $sl(2).\,\boldsymbol{a}$, dans chaque représentation cyclique).

Elle est antisymétrique. Soient π_1 et π_2 deux représentations cycliques de $sl(2).\,\boldsymbol{a}$ sur E_1 et E_2 ayant des composantes irréductibles de niveau n, $E_{n,1}$ et $E_{n,2}$ et telles que π_1 et π_2 s'absorbent mutuellement au niveau n. Il existe donc $E_1' \subset E_1$ et $E_2'' \subset E_2$ avec $E_{n,1} \subset E_1'$ et $E_{n,2} \cap E_2'' = \{0\}$ tels que la restriction de π_1 à E_1' est équivalente à la représentation induite par π_2 sur le quotient E_2/E_2''.

La représentation restriction de π_1 à E_1' est donc cyclique: soit S_1' son sous-espace générateur. On peut alors choisir un sous-espace générateur S_1 de π_1 sur E_1 tel que $S_1' = (\varphi_+^i \circ \varphi_-^j)(S_1)$. En posant $E_{n,1} = (\varphi_+^{i'} \circ \varphi_-^{j'})(S_1)$ on a alors $E_{n,1} = (\varphi_+^{i'-i} \circ \varphi_-^{j'-j})(S_1')$. D'autre part, dans la représentation induite par π_2 sur E_2/E_2'', en notant S_2 un sous-espace générateur de π_2 dans E_2, on a $\bar{E}_{n,2} = (\varphi_+^{i'-i} \circ \varphi_-^{j'-j})(\bar{S}_2)$ (en raison de l'équivalence des représentations cycliques engendrées par S_1' et S_2). On écrit maintenant que π_2 absorbe π_1. Il existe donc un sous-espace E_2' de E_2 et un sous-espace E_1'' de E_1 avec $E_{n,2} \subset E_2$ et $E_{n,1} \cap E_1'' = \{0\}$ tels que la sous-représentation de π_2 sur E_2' et la représentation induite par π_1 sur le quotient E_1/E_1'' sont équivalentes. Soit S_2' un sous-espace générateur de la restriction de π_2 à E_2'. On a $E_{n,1} = (\varphi_+^{i'} \circ \varphi_-^{j'})(S_1)$ donc $\bar{E}_{n,1} = (\varphi_+^{i'} \circ \varphi_-^{j'})(\bar{S}_1)$ (dans le quotient E_1/E_1'') et par conséquent $E_{n,2} = (\varphi_+^{i'} \circ \varphi_-^{j'})(S_2')$ (en raison de l'équivalence). On peut alors choisir dans E_2 un sous-espace générateur tel que $S_2' = (\varphi_+^k \circ \varphi_-^l)(S_2)$ de sorte que $E_{n,2} = (\varphi_+^{k+i'} \circ \varphi_-^{l+j'})(S_2)$ qui par passage au quotient dans E_2/E_2'' donne $\bar{E}_{n,2} = (\varphi_+^{k+i'} \circ \varphi_-^{l+j'})(\bar{S}_2)$. Cette relation et celle obtenue ci-dessus donne alors $i' - i = k + i'$ et $j' - j = l + j'$ d'où $i = k = 0$ et $j = l = 0$, c'est à dire $S_1 = S_1'$ et $S_2' = S_2$ soit encore $E_1' = E_1$ et $E_2' = E_2$. Les équivalences des représentations sur E_1 et E_2/E_2'' d'une part et sur E_2 et E_1/E_1'' d'autre part entrainent alors $E_1'' = \{0\}$ et $E_2'' = \{0\}$ (pour raison de dimensions) et π_1 et π_2 sont donc équivalentes. ∎

PROPOSITION. *Si* $E_0 = S_1 \oplus S_2$ *est un sous-espace générateur formé de deux sources non comparables au niveau n et telles que* $E_{n,1} = E_{n,2}$, *la représentation est indécomposable* ($E_{n,i}$ *la composante irréductible de dimension n de* $\psi(S_i)$).

Supposons que S_1' et S_2' soient deux sources telles que $S_1' \oplus S_2'$ est générateur et telles que les sous-espaces irréductibles pour $sl(2).\,\boldsymbol{a}$ de $\psi(S_1')$ et $\psi(S_2')$ soient indépendants. On a alors

$$\begin{cases} E_{n,1} = E_{n,2} \subset \psi(S_1') \quad \text{(par exemple)} \\ \text{et} \\ E_{n,1} \cap \psi(S_2') = \{0\}. \end{cases}$$

On a $S_2' \subset S_2 + F_1$ où F_1 est un sous-espace de $\psi(S_1)$ (puisqu'on sait que le remplacement de S_2 par une autre source de $\psi(S_2)$ donne la même composante irréductible $E_{n,2}$) avec $E_{n,1} \subset \psi(F_1)$. Si la représentation sur $\psi(F_1)$ était équivalente à un quotient de $\psi(S_2)$, S_1 absorberait S_2 au niveau n.

Donc il existe p et q tels que $\varphi_+^p \varphi_-^q(S_2) = \{0\}$ et $\varphi_+^p \varphi_-^q(S_2') = \varphi_+^p \varphi_-^q(F_1) \neq \{0\}$ et il existe k et l tels que $\varphi_+^p \varphi_-^q(F_1) = \varphi_+^{p+k} \varphi_-^{q+l}(S_1)$ (puisque $F_1 \subset \psi(S_1)$).

Or on a $S_1' \subset S_1 + F_2$ avec $F_2 \subset \psi(S_2)$, donc $\varphi_+^{p+k}\varphi_-^{q+l}(S_1') = \varphi_+^{p+k}\varphi_-^{q+l}(S_1) =$ $= \varphi_+^p \varphi_-^q(S_2')$ ce qui prouve que $\psi(S_1') \cap \psi(S_2') \neq \{0\}$. ∎

PROPOSITION. *Un sous-espace générateur $E_0 = S_1 \oplus S_2$ respectant le quotient engendre une représentation indécomposable si et seulement si $\psi(S_1) \cap \psi(S_2)$ contient une composante irréductible E_n à un niveau n où S_1 et S_2 ne sont pas comparables.*

Il est évidemment nécessaire que $\psi(S_1) \cap \psi(S_2)$ contienne une composante irréductible E_n pour $sl(2)$. $\boldsymbol{a}$. Supposons que S_1 absorbe S_2 au niveau n. Il existe alors une sous-repésentation de $\psi(S_1)$, contenant E_n, engendrée par une source S équivalente à un quotient de $\psi(S_2)$. On peut alors remplacer S_2 par une source $S_2' \subset S_2 + S$ tel que $S_1 \oplus S_2'$ est générateur et $\psi(S_2')$ est équivalente à une quotient de $\psi(S_2)$ avec $\psi(S_2') \cap E_n = \{0\}$, ce qui est impossible. D'autre part, la condition est suffisante d'après la proposition précédente. ∎

3. Représentations d'ordre 2 et représentations d'ordre p à p niveaux

PROPOSITION. *Toute représentation à p niveaux, strictement d'ordre p, se décompose en somme directe de représentations cycliques d'ordre p.*

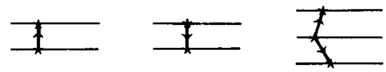
Soit π une représentation de $sl(2)$. $\boldsymbol{a}$ sur E, à p niveaux et strictement d'ordre p. Soit E_0 un sous-espace générateur $E = E_0 \oplus \varphi(E)$. Toute composante irréductible pour $sl(2)$ dans E_0 engendre une représentation cyclique d'ordre p. En effet, si E_n est irréductible pour $sl(2)$ *et* $E_n \subset E_0$, on a $\varphi^{p-1}(E_n) \neq 0$ (sinon $E_n \subset \varphi(E)$) et $\varphi^p(E_n) = \{0\}$. Or on a vu (partie I) qu'il y a p classes d'équivalence de représentations cycliques d'ordre p à p niveaux et que ces différentes classes n'ont pas de composantes irréductibles de même niveau. Soient $n, n+1, \ldots, n+p-1$ les niveaux de la représentation et $E_0 = F_{0,1} \oplus F_{0,2} \oplus \ldots \oplus F_{0,p}$ une décomposition de E_0 dans laquelle on a regroupé les sources de même dimension: $F_{0,k}$ est la somme directe des sources de dimension $n+k-1$. On a donc déjà la décomposition $E = \psi(F_{0,1}) \oplus \psi(F_{0,2}) \oplus \ldots \oplus \psi(F_{0,p})$.

Il ne reste plus qu'à décomposer $\psi(F_{0,k})$. Soit $F_{0,k} = S_1 \oplus S_2 \oplus \ldots \oplus S_q$ une décomposition de $F_{0,k}$ en sources. Les sous-espaces engendrés $\psi(S_i)$ contiennent chacun une et une seule composante irréductible pour $sl(2)$. $\boldsymbol{a}$, E_i de dimension $2n+p-(n+k-1)$. Si il existait $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ tels que $\sum_{i=1}^{q} \lambda_i E_i = 0$ on aurait $\varphi^p\left(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i S_i\right) = \{0\}$ ce qui est impossible. On a donc $\psi(F_{0,k}) = \bigoplus_{i=1}^{q} \psi(S_i)$. ■

PROPOSITION. *Pour tous n et p dans N, il existe deux représentations et deux seulement indécomposables d'ordre 2 à p niveaux: $n, (n+1), \ldots, (n+p-1)$.*

Soit π une représentation indécomposable d'ordre 2 sur E de dimension finie et $E_0 = E_{0,0} \oplus E_{0,1}$ us sous-espace générateur associé à la suite $\operatorname{Ker}\varphi \subset \operatorname{Ker}\varphi^2 = E$.

On a $E = E_{0,0} \oplus E_{0,1} \oplus \varphi(E)$ où $E_{0,0}$ et $E_{0,1} \oplus \varphi(E)$ sont invariants par $sl(2)$.

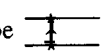
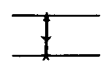
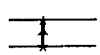
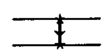
L'indécomposabilité impose donc $E_{0,0} = \{0\}$, $E_0 = E_{0,1}$ et $E = E_{0,1} \oplus \varphi(E)$: la représentation est strictement d'ordre 2. Or il n'y a que trois schémas de représentations strictement d'ordre 2:  .

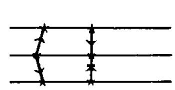
Soient $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ et $\mathscr{A}_3$ les ensembles de classes de représentations cycliques correspondantes et $E_{0,1} = E_0^+ \oplus E_0^- \oplus E_0^\pm$ un sous-espace générateur proprement associé. Considérons alors une décomposition de $E_0 = E_0^+ \oplus E_0^- \oplus E_0^\pm$ en $E_0 = E_{0,p} \oplus E_{0,i}$ où $E_{0,p}$ est la somme directe des sources de niveau pair et $E_{0,i}$ celle des sources de niveau impair (pour une décomposition donnée en sources de $E_0^+, E_0^-, E_0^\pm$).

On a $\psi(E_{0,p}) \cap \psi(E_{0,i}) = \{0\}$: en effet les composantes irréductibles de $\psi(E_{0,p})$ sont de niveau impair et celles de $\psi(E_{0,i})$ sont de niveau pair.

L'indécomposabilité impose alors $E_0 = E_{0,p}$ ou $E_0 = E_{0,i}$.

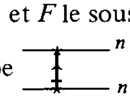
Raisonnons maintenant par récurrence sur le nombre de niveaux.

Pour deux niveaux, n, $n+1$: ou bien E_0 est formé de sources de type  ou bien E_0 est somme directe de sources du type  . Dans les deux cas, les composantes irréductibles correspondantes ne peuvent être liées et on a donc deux représentations à deux niveaux:  et  .

Supposons la propriété vraie jusqu'à $(p-1)$ niveaux, ce qui donne pour 3 niveaux les représentations  et pour 4 niveaux  .

Soit alors π à p niveaux $n, (n+1), \ldots, (n+p-1)$, indécomposable d'ordre 2

– ou bien π n'a que des sources d'ordre n, $n+2$, $n+4, \ldots$. Soient $S_1, S_2, \ldots, S_q$ les sources de niveau n et F le sous-espace engendré par les autres sources.

Les sources S_i sont du type 

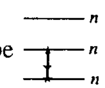
et F, par hypothèse de récurrence, se

décompose en une somme directe de représentations indécomposables d'ordre 2 à au plus $(p-1)$ niveaux entre $(n+1)$ et $(n+p-1)$: $F = \overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}} F_i$. Soient $N_i = \varphi(S_i)$ les sous-espaces irréductibles de niveau $(n+1)$ engendrés par les sources S_i : ils sont indépendants, sinon une combinaison linéaire des S_i serait dans Ker φ. Les sous-espaces F_i ont chacun une composante irréductible M_i de niveau $n+1$. En effet, si F_1, par exemple, n'en avait pas, on aurait une décomposition de $\pi : F_1 \oplus \left(\underset{i \neq 1}{\oplus} F_i + \sum_{i=1}^{q} \psi(S_i) \right)$. L'indécomposabilité impose $M_i \subset \overset{q}{\underset{i=1}{\oplus}} N_i$ et quitte à changer les sources $S_1, S_2, \ldots, S_q$, on peut supposer que $M_1 = N_1$, $M_2 = N_2$, $\ldots, M_r = N_r$ ce qui prouve que $q = r = 1$ puisqu'on a obtenu une decomposition de $\pi : E = (F_1 + \psi(S_1)) \oplus \ldots \oplus (F_r + \psi(S_r)) \oplus \left(\overset{q}{\underset{i=r+1}{\oplus}} \psi(S_i) \right)$.

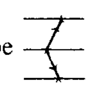
Donc $E = F_1 + \psi(S_1)$ et F_1 est l'unique représentation à $(p-1)$ niveaux $(n+1), \ldots, (n+p-1)$ ayant une composante irréductible de niveau $(n+1)$.

– ou bien π n'a que des sources de niveaux $(n+1), (n+3), \ldots$. Soient $S_1, \ldots, S_q$ les sources de niveau $n+1$ qui sont à priori de l'un des 3 types.

F le sous-espace engendré par les autres sources se décompose comme dans le cas précédent $F = \overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}} F_i$ en somme de représentations indécomposables d'ordre 2 à $(p-2)$ niveaux au plus entre $(n+2)$ et $(n+p-1)$. On a $\psi\left(\overset{q}{\underset{i=1}{\oplus}} S_i \right) = \overset{q}{\underset{i=1}{\oplus}} \psi(S_i)$ car le sous-espace générateur a été pris proprement associé à $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 \cup \mathscr{A}_2 \cup \mathscr{A}_3$.

Il en résulte qu'il ne peut y avoir de source du type 

puisque le sous-espace qu'elles engendrent est en somme directe avec le sous-espace engendré par les autres sources.

On termine ensuite la démonstration comme dans le cas précédent pour prouver que $q = r = 1$. La source S_1 est alors nécessairement du type 

pour qu'on ait effectivement p niveaux et la représentation sur F_1 est l'unique représentation indécomposable d'ordre 2 à $(p-2)$ niveaux $n+2, n+3, \ldots, n+p-1$ ayant une composante irréductible de niveau $(n+2)$. ∎

4. Critères de réductibilité d'une représentation de dimension finie de sl(2). a

PROPOSITION. *Pour une représentation indécomposable π de $sl(2)$. a sur E de dimension finie on a*

– *soit π est irréductible*

– *soit E ne contient aucune source irréductible pour $sl(2)$. a.*

Soit S une source irréductible pour $sl(2)$. a : $S \cap \varphi(E) = \{0\}$ et $\varphi(S) = \{0\}$.

Soit F un supplémentaire stable pour $sl(2)$ de $S \oplus \varphi(E)$ dans E.

On a $E = S \oplus (F \oplus \varphi(E))$ où S et $F \oplus \varphi(E)$ sont invariants par $sl(2).\boldsymbol{a}$ et l'indécomposabilité donne donc $E = S$ ou $E = F \oplus \varphi(E)$.

LEMME 2. *Soit un sous-espace générateur décomposé en sources* $E_0 = S_1 \oplus S_2 \oplus \oplus \ldots \oplus S_p$ *tel que* S_1 *absorbe* S_2 *au niveau n et tel qu'il existe une liaison de niveau* $n{:}\sum_1^p \lambda_i E_{n,i} = 0$ *avec* $\lambda_2 \neq 0$ ($E_{n,i}$ *la composante irréductible de niveau n de* $\psi(S_i)$). *Alors il existe une source* S_2' *telle que:*

– $S_1 \oplus S_2' \oplus S_3 \oplus \ldots \oplus S_p$ *est générateur*

– *la composante irréductible de niveau n,* $E'_{n,2}$ *de* $\psi(S_2')$ *est incluse dans la somme des* $E_{n,i}$, $3 \leqslant i \leqslant p$ *pour lesquels* $\lambda_i \neq 0$.

– *la représentation de* $sl(2).\boldsymbol{a}$ *sur* $\psi(S_2')$ *est équivalente à un quotient de celle sur* $\psi(S_2)$.

Si $\lambda_1 = 0$ on a $\lambda_2 E_{n,2} \subset \sum_{i=3}^{p} E_{n,i}$ et on prend $S_2' = S_2$.

Si $\lambda_1 \neq 0$, comme $\lambda_2 \neq 0$ et que S_1 absorbe S_2, il existe dans $\psi(S_1)$ une sous-représentation cyclique de sous-espace générateur S, contenant $E_{n,1}$, équivalente à un quotient de $\psi(S_2)$. Donc, il existe des entiers k, l tels que $E_{n,1} = (\varphi_+^k \circ \varphi_-^l)(S)$ et $E_{n,2} = (\varphi_+^k \circ \varphi_-^l)(S_2)$. En considérant alors $S_2' = \lambda_2 S_2 + \lambda_1 S$, on a $E'_{n,2} = (\varphi_+^k \circ \circ \varphi_-^l)(\lambda_2 S_2 + \lambda_1 S) = -\sum_{i=3}^{p} \lambda_i E_{n,i}$. Il est clair que la représentation sur $\psi(S_2')$ est équivalente à un quotient de celle sur $\psi(S_2)$ puisque c'est le cas de celle sur $\psi(S)$. Enfin on a $S_2 \subset S_1 \oplus S_2' \oplus S_3 \oplus \ldots \oplus S_p \oplus \varphi(E)$ et $(S_1 \oplus S_2' \oplus \ldots \oplus S_p) \cap \varphi(E) = \{0\}$ donc $S_1 \oplus S_2' \oplus S_3 \oplus \ldots \oplus S_p$ est générateur. ■

LEMME 3. *Soit un sous-espace générateur décomposé en sources* $E_0 = S_1 \oplus \oplus \ldots \oplus S_p$ *tel que* S_1 *absorbe* S_i $\forall i \leqslant q$ *au niveau n et tel que* $\psi(S_1) \cap \cap\, \psi\left(\bigoplus_{i=2}^{p} S_i\right) \subset E_{n,1}$ ($E_{n,i}$ *la composante irréductible de niveau n de* $\psi(S_i)$) alors:

– *ou bien* $E_{n,1} \subset \sum_{i=q+1}^{p} E_{n,i}$

– *ou bien* $\psi(S_1)$ *adment un supplémentaire stable par* $sl(2).\boldsymbol{a}$.

Soient donc $S_2, \ldots, S_q$ les sources absorbées par S_1 et $S_{q+1} \ldots S_p$ celles qui ne le sont pas et supposons $E_{n,1} \not\subset \sum_{i=q+1}^{p} E_{n,i}$. On a

– ou bien $E_{n,1} \cap \sum_{i=2}^{p} E_{n,i} = \{0\}$ et $\psi\left(\bigoplus_{i=2}^{p} S_i\right)$ est un supplémentaire invariant de $\psi(S_1)$.

– ou bien $E_{n,1} \subset \sum_{i=2}^{p} E_{n,i}$: soit alors $S_2, \ldots, S_k$ (par exemple) une famille minimale de sources parmi $S_2 \ldots S_q$ telle que $E_{n,1} \subset \sum_2^k E_{n,i} + \sum_{q+1}^{p} E_{n,i}$. On a

$E_{n,2} \subset E_{n,1} + \sum_3^k E_{n,i} + \sum_{q+1}^p E_{n,i}$ et, d'après le lemme 2, on peut remplacer S_2 par S_2' telle que $E_{n,2}' \subset \sum_3^k E_{n,i} + \sum_{q+1}^p E_{n,i}$ et $S_1 \oplus S_2' \oplus S_3 \oplus \ldots \oplus S_p$ est générateur. On a alors une décomposition de la représentation engendrée par $S_1 \oplus S_2' \oplus \oplus \left(\overset{k}{\underset{i=3}{\oplus}} S_i\right) \oplus \left(\overset{p}{\underset{i=q+1}{\oplus}} S_i\right)$: $\psi\left(S_1 \oplus S_2' \oplus \left(\overset{k}{\underset{i=3}{\oplus}} S_i\right) \oplus \left(\overset{p}{\underset{i=q+1}{\oplus}} S_i\right)\right) = \psi(S_1) \oplus \psi\left(S_2' \oplus \oplus \left(\overset{k}{\underset{i=3}{\oplus}} S_i\right) \oplus \left(\overset{p}{\underset{i=q+1}{\oplus}} S_i\right)\right)$.

En effet S_2' ne peut introduire de liaison avec $\psi(S_1)$ à un niveau autre que n puisque $\psi(S_2')$ est équivalente à un quotient de $\psi(S_2)$.

Considérons alors la composante irréductible $E_{n,k+1}$ de $\psi(S_{k+1})$, on a ou bien $E_{n,k+1} \cap \left(E_{n,1} \oplus \left(\sum_3^k E_{n,i} + \sum_{q+1}^p E_{n,i}\right)\right) = \{0\}$ et un obtient alors la décomposition $\psi\left(S_1 \oplus S_2' \oplus \left(\overset{k+1}{\underset{i=3}{\oplus}} S_i\right) \oplus \left(\overset{p}{\underset{i=q+1}{\oplus}} S_i\right)\right) = \psi(S_1) \oplus \psi\left(S_2' \oplus \left(\overset{k+1}{\underset{i=3}{\oplus}} S_i\right) \oplus \left(\overset{p}{\underset{i=q+1}{\oplus}} S_i\right)\right)$ ou bien $E_{n,k+1} \subset E_{n,1} \oplus \left(\sum_3^k E_{n,i} + \sum_{q+1}^p E_{n,i}\right)$: on peut alors remplacer S_{k+1} par S_{k+1}' de sorte que $S_1 \oplus S_2' \oplus \left(\overset{k}{\underset{i=3}{\oplus}} S_i\right) \oplus S_{k+1}' \oplus \left(\overset{p}{\underset{i=k+2}{\oplus}} S_i\right)$ est générateur, $E_{n,k+1}' \subset \subset \sum_3^k E_{n,i} + \sum_{q+1}^p E_{n,i}$ et on a la décomposition $\psi\left(S_1 \oplus S_2' \oplus \left(\overset{k}{\underset{i=3}{\oplus}} S_i\right) \oplus S_{k+1}' \oplus \oplus \left(\overset{p}{\underset{i=q+1}{\oplus}} S_i\right)\right) = \psi(S_1) \oplus \psi\left(S_2' \oplus \left(\overset{k}{\underset{i=3}{\oplus}} S_i\right) \oplus S_{k+1}' \oplus \left(\overset{p}{\underset{i=q+1}{\oplus}} S_i\right)\right)$.

On itère ensuite ce raisonnement pour les composantes irréductibles $E_{n,k+2}, \ldots, E_{n,q}$ pour construire un supplémentaire invariant de $\psi(S_1)$. ■

LEMME 4. *Soit un sous-espace générateur décomposé en sources* $E_0 = S_1 \oplus \ldots \oplus S_p$ *tel que* S_1 *est absorbée par* S_i $\forall i \leqslant q$ *au niveau* n *et tel que* $\psi(S_1) \cap \cap\, \psi\left(\overset{p}{\underset{i=2}{\oplus}} S_i\right) \subset E_{n,1}$ ($E_{n,i}$ *la composante irréductible de niveau* n *de* $\psi(S_i)$) *alors*:

– *ou bien il existe un source* S_1' *telle que* $S_1' \oplus S_2 \oplus \ldots \oplus S_p$ *est générateur, telle que* $E_{n,1}' \subset \sum_{i=q+1}^p E_{n,i}$ *et telle que* $\psi(S_1')$ *est équivalente à un quotient de* $\psi(S_1)$.

– *ou bien* $\psi(S_1)$ *admet un supplémentaire invariant par* $sl(2).a$.

Si $E_{n,1} \cap \sum_{i=2}^p E_{n,i} = \{0\}$, alors $\psi\left(\overset{p}{\underset{i=2}{\oplus}} S_i\right)$ est un supplémentaire invariant de $\psi(S_1)$.

Si $E_{n,1} \subset \sum_{i=2}^p E_{n,i}$, ou bien $E_{n,1} \subset \sum_{i=q+1}^p E_{n,i}$ et on choisit $S_1' = S_1$, ou bien il existe une famille minimale de sources $S_2, S_3, \ldots, S_k$ (par exemple) telle que $E_{n,1} \subset \sum_{i=2}^k E_{n,i} + \sum_{i=q+1}^p E_{n,i}$. Il résulte alors du lemme 2 qu'on peut remplacer S_1 par une source S telle que $S \oplus S_2 \oplus \ldots \oplus S_p$ est générateur et le sous-espace irréductible de niveau n de $\psi(S)$ est inclus dans $\sum_{i=3}^{k} E_{n,i} + \sum_{i=q+1}^{p} E_{n,i}$. La source S est absorbée au niveau n par $S_3, \ldots, S_k$ et on peut donc itérer le raisonnement pour construire S_1' satisfaisant aux conditions du Lemme. ■

COROLLAIRE. *Une représentation de sous-espace générateur* $E_0 = S_1 \oplus \ldots \oplus S_p$ *tel que* S_1 *absorbe (respectivement est absorbée par)* S_i *au niveau* n $\forall i \geqslant 2$ *et telle que* $\psi(S_1) \cap \psi\left(\bigoplus_{i=2}^{p} S_i\right) \subset E_{n,1}$ *est réductible dès que* $p \geqslant 2$.

Si S_1 absorbe S_i $\forall i \geqslant 2$, il résulte du Lemme 3 que soit $E_{n,1} = \{0\}$ ce qui n'est pas possible, soit $\psi(S_1)$ a un supplémentaire stable.

Si S_1 est absorbée par S_i au niveau n $\forall i \geqslant 2$, il résulte du lemme 4 que soit il existe S_1' telle que $E_{n,1}' = \{0\}$ et $\psi\left(\bigoplus_{i=1}^{p} S_i\right) = \psi(S_1') \oplus \psi\left(\bigoplus_{i=2}^{p} S_i\right)$ (hypothèse à à rejeter si le sous-espace générateur respecte le quotient) soit $\psi(S_1)$ admet un supplémentaire stable. ■

PROPOSITION. *Toute représentation cyclique d'ordre* p *à* p *niveaux compris entre* n *et* $n+p-1$ *obsorbe toures les représentations cycliques à* p *niveau au plus entre* n *et* $n+p-1$ *ayant une composante irréductible de même dimension qu'elle.*

Il suffit de considérer les schémas correspondant à ces représentations: Toute représentation à p niveaux au plus, entre n et $n+p-1$, ayant une composante irréductible E_{n_0} pour $sl(2)$. $\boldsymbol{a}$, est équivalente à une sous-représentation de la représentation cyclique d'ordre p à p niveaux $n, n+1, \ldots, n+p-1$ ayant une composante irréductible de dimension n_0. ■

PROPOSITION. *Toute représentation à* p *niveaux sur* E *de dimension finie admet un sous-espace générateur respectant l'ordre* $E_0 = E_{0,0} \oplus E_{0,1} \oplus \ldots \oplus E_{0,p}$ *tel que la représentation se décompose en* $E = \psi(E_{0,0}) \oplus \psi\left(\bigoplus_{i=1}^{p-1} E_{0,i}\right) \oplus \psi(E_{0,p})$.

On a déjà vu (lère proposition du II.4) que $E = \psi(E_{0,0}) \oplus \psi\left(\bigoplus_{i=1}^{p} E_{0,i}\right)$ pour une décomposition donnée $E_0 = \bigoplus_{i=0}^{p} E_{0,i}$.

Considérons alors des décompositions en sources de $E_{0,1}, E_{0,2}, \ldots, E_{0,p}$ de sorte que $\bigoplus_{i=1}^{p} E_{0,i} = \bigoplus_{i=1}^{m} S_i$. Et soit S_1 (par exemple) une source de $E_{0,p}$. Soient $S_2, \ldots, S_q$ les sources engendrant des composantes irréductibles $E_{n,i}$ de même niveau n que $E_{n,1}$. Ces sources sont toutes absorbées par S_1 au niveau n (proposition précédente). Comme on ne peut avoir $E_{n,1} \subset \sum_{i=q+1}^{p} E_{n,i} = \{0\}$ (puisque $E_{n,1} \neq \{0\}$), il résulte du lemme 3 que $\psi(S_1)$ admet un supplémentaire invariant dans $\psi\left(\bigoplus_{i=1}^{p} E_{0,i}\right)$. On peut alors recommencer le même raisonnement dans ce supplémentaire et on trouve finalement des sources $S_1, S_2, \ldots, S_k$ d'ordre p à p niveaux telles que $\bigoplus_{i=1}^{k} \psi(S_i)$ admet un supplémentaire invariant dans $\psi\left(\bigoplus_{i=1}^{p} E_{0,i}\right)$.

Sur ce dernier, on a une représentation d'ordre inférieur à $p - 1$ pour laquelle on peut choisir un sous-espace générateur respectant l'ordre, ce qui achève la démonstration. ■

COROLLAIRE. *Toute représentation indécomposable d'ordre p à p niveaux est cyclique.*

Cela résulte de la proposition précédente et de la première proposition de II.3. ■

LEMME 5. *Pour un sous-espace générateur $E_0 = E_{0,0} \oplus \ldots \oplus E_{0,n}$ proprement associé à une partition respectant le quotient et une décomposition des $E_{0,i}$ en sources telle que $E_0 = \bigoplus_{i=1}^{p} S_i$, si S_1 est absorbée par $S_2, \ldots, S_k$ au niveau n on a $E_{n,1} \cap \psi\left(\bigoplus_{i=2}^{k} S_i\right) = \{0\}$ ($E_{n,i}$ la composante irréductible de niveau n de $\psi(S_i)$).*

Supposons que $E_{n,1} = \sum_{i=2}^{k} \lambda_i E_{n,i}$. Puisque S_i absorbe S_1 au niveau n pour tout $i \leqslant k$, il existe dans $\psi(S_i)$ un sous-espace E_i tel que $\psi(E_i)$ porte une représentation équivalente à un quotient de $\psi(S_1)$ et $E_{n,i} \subset \psi(E_i)$. Considérons alors $S_1' = S_1 - \sum_{i=2}^{k} \lambda_i E_i : S_1' \oplus S_2 \oplus \ldots \oplus S_p$ est un sous-espace générateur et $\psi(S_1')$ est un quotient propre de $\psi(S_1)$ puisqu'il n'a pas de composante irréductible de niveau n. Donc ceci est impossible. ■

COROLLAIRE. *Dans une représentation de sous-espace générateur respectant le quotient et décomposé en sources $E_0 = \bigoplus_{i=1}^{p} S_i$ tel que S_1 absorbe (respectivement est absorbée par) S_i pour tout i au niveau n et tel que les composantes irréductibles des $\psi(S_i)$ aux niveaux autres que n sont indépendantes, le sous-espace $\psi(S_1)$ admet un supplémentaire stable.*

Il suffit de reprendre les démonstrations des lemmes 3 et 4 en ajoutant l'hypothèse que le quotient est respecté. ■

LEMME 6. *Une représentation de sous-espace générateur respectant le quotient et décomposé en sources,* $E_0 = \overset{p}{\underset{i=1}{\oplus}} S_i$, *tel que les composantes irréductibles des* $\psi(S_i)$ *aux niveaux autres que* n *sont indépendantes et tel que, au niveau* n, *l'ensemble des sources non absorbées par* S_1 *est totalement ordonné pour l'absorption au niveau* n *est réductible dès que* $p \geqslant 3$.

Supposons que S_1 absorbe $S_1 \dots S_k$ au niveau n et que l'ensemble des sources $\{S_{k+1}, \dots, S_p\}$ est totalement ordonné: S_{i+1} absorbe S_i au niveau n pour $k + 1 \leqslant i \leqslant p - 1$.

Il résulte du lemme 3 que soit $\psi(S_1)$ admet un supplémentaire invariant, soit $E_{n,1} = \sum_{i=k+1}^{p} \lambda_i E_{n,i}$ ($E_{n,i}$ la composante irréductible de niveau n de $\psi(S_i)$). Supposons que S_{k+1} (par exemple) soit minimale pour l'absorption au niveau n telle que $\lambda_{k+1} \neq 0$. S_i absorbe S_{k+1} au niveau n $\forall i > k + 1$, donc il existe dans $\psi(S_i)$ un sous-espace E_i de même dimension que S_{k+1} tel que $E_{n,i} \subset \psi(E_i)$.

On peut ainsi remplacer la source S_{k+1} par $S'_{k+1} = \lambda_{k+1} S_{k+1} + \sum_{i=k+2}^{p} \lambda_i E_i$ de sorte que $E'_{n,1} = E'_{n,k+1}$. Les sous-espaces $E_{n,k+1}, E_{n,k+2}, \dots, E_{n,p}$ ne peuvent être liés (lemme 5) de même que $E'_{n,k+1}, E_{n,k+2}, \dots, E_{n,p}$. On a les décompositions

$$\begin{cases} \psi\left(\overset{p}{\underset{i=k+1}{\oplus}} S_i\right) = \psi(S'_{k+1}) \oplus \psi\left(\overset{p}{\underset{i=k+2}{\oplus}} S_i\right) \\ \psi(S_1 \oplus S_{k+1} \oplus \dots \oplus S_p) = \psi(S_1 \oplus S'_{k+1}) \oplus \psi\left(\overset{p}{\underset{i=k+2}{\oplus}} S_i\right). \end{cases}$$

En considérant maintenant la source S_2, on a:

— ou bien $E_{n,2} \cap \left(E_{n,1} \oplus \left(\overset{p}{\underset{i=k+2}{\oplus}} E_{n,i}\right)\right) = \{0\}$ et la décomposition

$$\psi(S_1 \oplus S_2 \oplus S_{k+1} \oplus \dots \oplus S_p) = \psi(S_1 \oplus S'_{k+1}) \oplus \psi(S_2 \oplus S_{k+2} \oplus \dots \oplus S_p)$$

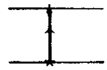
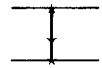
— ou bien $E_{n,2} \subset E_{n,1} \oplus \left(\overset{p}{\underset{i=k+2}{\oplus}} E_{n,i}\right)$ et comme S_1 absorbe S_2, on peut remplacer S_2 par S'_2 telle que $E'_{n,2} \subset \overset{p}{\underset{i=k+2}{\oplus}} E_{n,i}$ (Lemme 2) ce qui donne

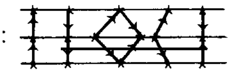
$$\psi(S_1 \oplus S_2 \oplus S_{k+1} \oplus \dots \oplus S_p) = \psi(S_1 \oplus S'_{k+1}) \oplus \psi(S'_2 \oplus S_{k+2} \oplus \dots \oplus S_p).$$

On itère ensuite ce raisonnement pour les sources $S_3, \dots, S_k$ et on démontre que $\psi(S_1 \oplus S'_{k+1})$ admet un supplémentaire stable. ■

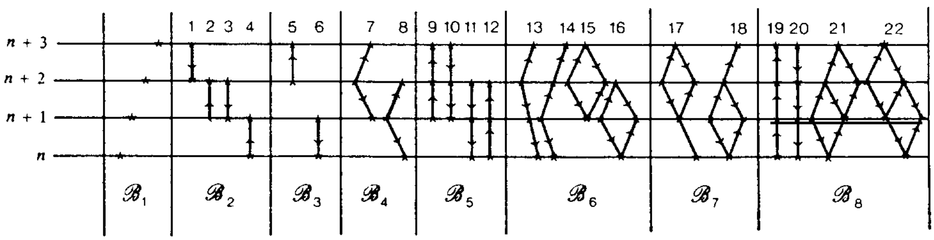
5. Représentations indécomposables de sl(2). *a* à quatre niveaux au plus

Les représentations indécompsables à 1 niveau seulement sont les irréductibles. Les représentations indécomposables à 2 niveaux sont d'ordre 2 donc strictement d'ordre 2 et on a vu (partie II, 3) qu'il y en a deux:

 et 

Les représentations indécomposables à 3 niveaux sont soit d'ordre 3 et sont alors cycliques soit strictement d'ordre 2 et il y en a 2:  .

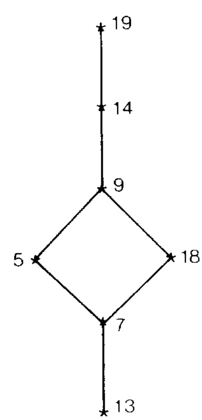
Pour construire les représentations indécomposables à 4 niveaux, on envisage la partition suivante de $\mathscr{A}$:



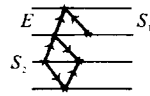
Soit $E_0 = E_{0,0} \oplus E_{0,1} \oplus \ldots \oplus E_{0,7}$ un sous-espace générateur proprement associé à cette partition $\mathscr{A} = \bigcup_{i=1}^{8} \mathscr{B}_i$. On a vu qu'il était possible de choisir ce sous-espace tel que $\psi(E_0) = \psi(E_{0,0}) \oplus \psi\left(\bigoplus_{i=1}^{6} E_{0,i}\right) \oplus \psi(E_{0,7})$. Mais nous allons retrouver ce résultat directement. Notons que la partition respecte l'ordre et le quotient.

On a numéroté les différentes classes d'équivalence autres que les irréductibles de 1 à 22 et $E_{0,i}$ se décompose en sources appartenant à $\mathscr{B}_{i+1}$.

Montrons qu'il ne peut y avoir de liaisons entre les composantes irréductibles au niveau $n + 3$. Une telle liaison ne peut faire intervenir que les sources ayant une composante irréductible à ce niveau: $\{5, 7, 9, 13, 14, 18, 19\}$. On construit le diagramme de la relation d'absorption au niveau $n + 3$. On constate que toute famille de sources prisés parmi ces sept classes est telle que l'une est absorbée par toutes les autres s'il manque l'une des classes 5 ou 18 auquel cas (Lemme 5.II.4) ces sources ne peuvent engendrer des composantes irréductibles liées au niveau $n + 3$.



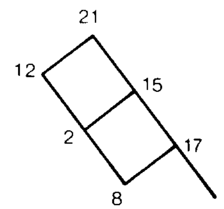
Toujours d'après le lemme 5 (II.4) ces sources ne peuvent engendrer des composantes irréductibles liées a un autre niveau: au niveau $(n + 1)$, seules 7 et 18 ont une composante irréductible et 18 absorbe 7 à ce niveau $(n + 1)$, au niveau n, seules 13 et 14 ont une composante irréductible et 13 absorbe 14.

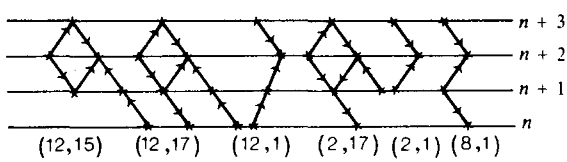
Pour une famille de sources contenant 5 ou 18 on peut appliquer le lemme 6 (II,4) et on trouve une seule liaison possible: (5.18) 

avec $S_1 \in \mathscr{B}_3$ et $S_2 \in \mathscr{B}_7$. Il existerait alors $S_1' = S_1 + \lambda E$ telle que $S_1' \oplus S_2$ soit générateur avec $S_1' \in \mathscr{B}_2$ ce qui est impossible.

De même, les composantes irréductibles du niveau n ne peuvent être liées. Seules sont donc prossibles les liaisons entre composantes irréductibles aux niveaux $n + 1$ et $n + 2$.

Or il apparait que l'ensemble des sources engendrant une composante irréductible de niveau $n + 2$: $\{1, 2, 8, 12, 15, 17, 21\}$ est disjoint de l'ensemble des sources avant une composante irréductible au niveau $(n + 1)$: $\{3, 4, 7, 10, 16, 18, 22\}$. La représentation se décompose donc en la somme directe des sous-espaces engendrés par ces deux ensembles de sources. Considérons d'abord la représentation engendrée par les sources $\{1, 2, 8, 12, 15, 17, 21\}$. Seules les composantes irreductibles de niveau $n + 2$ peuvent être liées et on a le diagramme d'absorption ci-contre. On constate qu'on est à nouveau dans les conditions d'application du lemme 6 et on obtient les représentations indécomposables suivantes engendrées par deux sources non comparables au niveau $(n + 2)$ correspondant aux schémas:

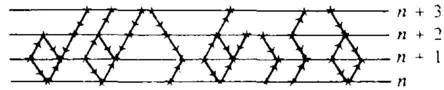




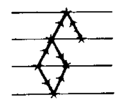
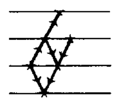
Il faut examiner ici si en plus de la relation de liaison entre composantes irréductibles, il peut y avoir ou non une relation entre sous-espaces de même dimension, irréductibles pour $sl(2)$ et non irréductibles pour $sl(2)$. $\boldsymbol{a}$. Dans le cas (12, 15),

on trouve en effet l'éventualité: 

Dans les autres cas, cela ne peut arriver car les sous-espaces de niveau $(n + 1)$ (les seuls susceptibles d'être liés) n'engendrent pas des représentations équivalentes de $sl(2)$. $\boldsymbol{a}$.

Par symétrie, l'ensemble de sources $\{3, 4, 7, 10, 16, 18, 22\}$ engendre les représentations indécomposables suivantes: 

On trouve donc finalement que toute représentation sur quatre niveaux se décompose en somme directe des 26 représentations cycliques (y compris les irréductibles) et des 14 représentations engendrées par deux sources que l'on vient de construire. Et il apparait ainsi 20 représentations indécomposables sur 4 niveaux (exactement) dont huit sont cycliques.

Remarquons qu'il n'y a plus unicité du schéma associé à une représentation indécomposable engendrée par deux sources, mais qu'il y a unicité lorsqu'on impose un sous-espace générateur proprement associé à un partition donnée suffisamment fine de $\mathscr{A}$. C'est ainsi que pour le choix $\mathscr{A} = \cup\, \mathscr{B}_i$ que nous avons fait sur quatre niveaux, la représentation  qui existe bien, apparait sous la forme  .

III. ETUDE DES INJECTIONS DE L'ALGEBRE DE LIE sl(2). *a* DANS UNE ALGEBRE DE LIE SEMI-SIMPLE *g*

LEMME 1. *Pour toute algèbre de Lie semi-simple g contenant $sl(2)$. $\boldsymbol{a}$, il existe un entier n tel que $sl(2)$. $\boldsymbol{a} \subset \boldsymbol{g} \subset sl(n)$.*

En effet, d'après le théorème d'Ado, il existe une représentation π fidèle de dimension finie de $\boldsymbol{g}$. On a donc $\pi(sl(2).\, \boldsymbol{a}) \subset \pi(\boldsymbol{g}) \subset sl(n)$. ■

LEMME 2. *Il existe une bijection entre les classes de conjugaison de sous-algèbres de Lie isomorphes à $sl(2)$. $\boldsymbol{a}$ dans $sl(n)$ et les classes d'équivalence de représentations fidèles de dimension n de $sl(2)$. $\boldsymbol{a}$.*

Il est clair que toute représentation fidèle π de dimension finie n de $sl(2)$. $\boldsymbol{a}$ définit une sous àlgèbre de $sl(n)$: $\pi(sl(2).\, \boldsymbol{a})$ isomorphe à $sl(2)$. $\boldsymbol{a}$.

En effet $\pi(sl(2).\, \boldsymbol{a}) \subset sl(n)$ puisque $sl(2)$ est semi-simple et les relations $[H\, P_1] = P_1$ et $[H\, P_2] = -P_2$ entrainent que $\pi(P_1)$ et $\pi(P_2)$ sont nilpotents de trace nulle. D'autre part l'équivalence de deux représentations π et π' est la définition même de la conjugaison de $\pi(sl(2).\, \boldsymbol{a})$ et $\pi'(sl(2).\, \boldsymbol{a})$. ■

LEMME 3. *Une représentation π de $sl(2)$. $\boldsymbol{a}$ est fidèle si et seulement si $\pi(P_1) \neq$ $\neq 0$ (ou $\pi(P_2) \neq 0$).*

La condition $\pi(P_1) \neq 0$ est évidemment nécessaire. Réciproquement, il résulte des relations de commutation que si $\pi(P_1) \neq 0$, le noyau de π est réduit à $\{0\}$. ■

COROLLAIRE. *Toute représentation fidèle de $sl(2). \boldsymbol{a}$ se décompose en somme directe de représentations irréductibles et d'au moins une représentation indécomposable.*

Il résulte en effet du Lemme 3 que les représentations non fidèles de $sl(2). \boldsymbol{a}$ vérifient $\pi(P_i) = 0$ et se décomposent donc en somme d'irréductibles. ■

Comme toute injection de $sl(2). \boldsymbol{a}$ dans une algèbre de Lie semi-simple $\boldsymbol{g}$ définit une injection de $sl(2). \boldsymbol{a}$ dans toute algèbre de Lie contenant $\boldsymbol{g}$ on est amené à définir les algèbres de Lie semi-simples minimales contenant $sl(2). \boldsymbol{a}$.

DÉFINITION. Une algèbre de Lie semi-simple $\boldsymbol{g}$ est minimale contenant $sl(2). \boldsymbol{a}$ si elle est minimale au sens de l'inclusion.

Notation. Pour toute représentation π de dimension finie n de $sl(2). \boldsymbol{a}$ une sous-algèbre semi-simple minimale de $sl(n)$ contenant $\pi(sl(2). \boldsymbol{a})$ sera notée $\boldsymbol{g}_\pi$ (Remarquons que $\boldsymbol{g}_\pi = sl(2)$ lorsque π est non fidèle).

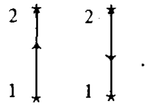
REMARQUE. On peut en fait se poser deux problèmes distincts

– ou bien une algèbre de Lie semi-simple $\boldsymbol{g}$ contenant $sl(2). \boldsymbol{a}$ est donnée et on cherche ses classes de conjugaison isomorphes à $sl(2). \boldsymbol{a}$. On se donne alors une représentation fidèle π de dimension n de $\boldsymbol{g}$. Si on connait toutes les classes de représentations fidèles de $sl(2). \boldsymbol{a}$ de dimension n, on connait alors toutes les classes de conjugaison isomorphes à $sl(2). \boldsymbol{a}$ dans $sl(n)$ et il suffit de déterminer celles qui sont dans $\pi(\boldsymbol{g})$.

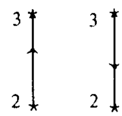
– ou bien on cherche des algèbres de Lie semi-simples minimales contenant $sl(2). \boldsymbol{a}$. On peut alors les chercher comme sous-algèbres de Lie des algèbres de Lie $sl(n)$ en considérant les différentes représentations fidèles de dimension n de $sl(2). \boldsymbol{a}$. Notons qu'une sous-algèbre $\boldsymbol{g}_\pi$ n'est autre qu'une sous-algèbre de Lie semi-simple minimale à laquelle se prolonge la représentation π de $sl(2). \boldsymbol{a}$.

Pour illustrer la première partie de cette remarque, nous allons déterminer toutes les représentations fidèles de $sl(2). \boldsymbol{a}$ de dimension n pour $3 \leqslant n \leqslant 6$, ce qui nous donnera aussi toutes les classes de conjugaison isomorphes à $sl(2). \boldsymbol{a}$ dans $sl(n)$, $n \leqslant 6$. L'argument essentiel est qu'une représentation fidèle de $sl(2). \boldsymbol{a}$ contient au moins une sous-représentation indécomposable qui elle-même contient au moins deux composantes irréductibles pour $sl(2)$ de dimensions des entiers consécutifs. Ceci impose donc $n \geqslant 3$.

Pour $n = 3$, il y a deux représentations indécomposables fidèles de schémas:



Pour $n = 4$, la seule possibilité pour la restriction de la représentation à $sl(2)$ est $4 = 1 + 1 + 2$: deux représentations de dimension 1 et une de dimension 2. Ceci correspond à la somme de la représentation triviale de $sl(2)$. $\boldsymbol{a}$ et de l'une ou l'autre des représentations de dimension 3 décrites ci-dessus. Il y a donc dans $sl(4)$ deux classes de conjugaison qui sont celles de $sl(3)$ dans l'inclusion canonique $sl(3) \subset sl(4)$.

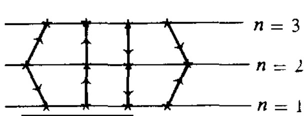
Pour $n = 5$, les décompositions de 5 à envisager sont: $5 = 2 + 3$: on trouve ici les deux représentations cycliques  et deux classes de conjugaison correspondantes dans $sl(5)$.

$5 = 2 + 2 + 1$: ceci correspond à deux représentations sommes de la représentation irréductible de dimension 2 et de l'une ou l'autre des représentations cycliques de dimension 3. Il leur correspond deux classes de conjugaison provenant de $sl(2) \oplus sl(3)$.

$5 = 1 + 1 + 1 + 2$: on obtient ici deux représentations sommes directes de deux représentations triviales et de l'une ou l'autre des représentations cycliques de dimension 3. Les classes de conjugaison correspondantes sont celles de $sl(3)$ dans l'inclusion $sl(3) \subset sl(4) \subset sl(5)$.

Ceci nous donne finalement 6 classes de conjugaison dans $sl(5)$.

Pour $n = 6$, on peut envisager les différentes décompositions suivantes: $6 = 3 + + 2 + 1$. Il y a déjà 4 représentations indécomposables de dimension 6 donnant 4



classes de conjugaisons.

Il y a ensuite deux représentations sommes de la représentation irréductible de dimension 3 et de l'une ou l'autre des indécomposables cycliques de dimension 3 auxquelles correspondent deux classes de conjugaison provenant de $sl(3) \oplus sl(3)$.

Il y a enfin deux représentations sommes directes d'une irréductibles triviale et de l'une ou l'autre des représentations cycliques de dimension 5 qui donnent deux classes de conjugaisons provenant de $sl(5) \subset sl(6)$.

$6 = 2 + 2 + 1 + 1$: On peut déjà avoir la somme de deux représentations cycliques de dimension 3, ce qui donne 3 représentations et 3 classes correspon dantes provenant de la sous-algèbre $sl(3) \oplus sl(3)$. On peut encore avoir la somme directe des irréductibles de dimension 1 et 2 et de l'une des représentations cycliques de dimension 3 donnant deux classes de conjugaison provenant de $sl(2) \oplus sl(3) \subset sl(5) \subset sl(6)$.

$6 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1$: On trouve ici les sommes directes de 3 représentations triviales de dimension 1 et de l'une des représentations cycliques de dimension 3 qui donnent deux classes de conjugaison provenant de $sl(2) \oplus sl(3) \subset sl(5) \subset sl(6)$.

On a finalement trouvé 15 classes de conjugaison dont les 6 de $sl(5)$.

Envisageons maintenant le second problème proposé dans la remarque ci-dessus: la recherche de sous-algèbres de Lie semi-simples minimales g_π contenant $sl(2).\,a$ (ou encore auxquelles se prolonge la représentation π de $sl(2).\,a$).

Pour cela, nous allons utiliser le lemme suivant dont l'idée est due à E. Angelopoulos.

LEMME 4. *Si g est une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie contenant une sous-algèbre produit semi-direct $h.\,a$ où a est abélienne, h semi-simple et l'action de h sur a définie par une représentation irréductible Λ de h, n'ayant pas de poids 0, alors il existe dans g un sous-espace b portant une représentation irréductible de h équivalente à la contragrédiente de Λ tel que $a \cap b = \{0\}$ et $b \cap h = \{0\}$.*

Soit β la forme de Killing de g, $a^\perp$ le sous-espace orthogonal de a dans g pour β, h_c une sous-algèbre de Cartan de h et $h = h_c \oplus \sum_{\alpha \in R} g^\alpha$ la décomposition de h suivant un système de racines R.

– $a^\perp$ est stable par h. En effet, pour $Q \in a^\perp$ et $X \in h$, on a $\beta(P_i, [XQ]) = = \beta([P_i X], Q) = 0$ puisque $[P_i X] \in a$. Comme h est semi-simple, la restriction à h de la représentation adjointe de g est complètement réductible et il existe un sous-espace b de g de même dimension que a, invariant par h, tel que $g = a^\perp \oplus b$.

– On a $a \subset a^\perp$ et $h \subset a^\perp$. Soit n la dimension de a et $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ une base de a sur laquelle les éléments de h_c sont diagonaux.

Quelque soit P_i, il existe $H_i \in h_c$ tel que $[H_i P_i] = \lambda_i P_i$ avec $\lambda_i \neq 0$, puisque la représentation Λ n'a pas de poids 0. On a alors $\beta(P_i P_j) = \dfrac{1}{\lambda_i} \beta([HP_i], P_j) = = \dfrac{1}{\lambda_i} \beta(H, [P_i P_j]) = 0$ $\forall j$ donc $P_i \in a^\perp$ et $a \cap a^\perp \neq \{0\}$.

L'irréductibilité de Λ donne alors $a \cap a^\perp = a$.

On a d'autre part pour tout $H' \in h_c : \beta(P_i, H') = \dfrac{1}{\lambda_i} \beta([H_i P_i], H') = 0$ donc $h_c \subset a^\perp$.

On a $h_c \subset h \cap a^\perp$ et $h \cap a^\perp$ est un idéal de h: on en déduit que pour tout $X_\alpha \in g^\alpha$

on a $2X_\alpha = [H_\alpha X_\alpha] \in h \cap a^\perp$ et par suite que $g^\alpha \subset a^\perp$ et $h \subset a^\perp$ ($\forall X_\alpha$ on sait qu'il existe $H_\alpha \in h_c$ tel que $[H_\alpha X_\alpha] = 2X_\alpha$).

– Choisissons une base de g formée d'une base de a, d'une base d'un supplémentaire c de a dans $a^\perp$ et d'une base de b : $g = a \oplus c \oplus b$ avec $a^\perp = a \oplus c$. La matrice de la forme de Killing β sur cette base est du type $\left(\begin{array}{c:c:c} 0 & 0 & J \\ \hdashline 0 & M & K \\ \hdashline {}^TJ & {}^TK & I \end{array}\right)$ où M et I sont symétriques, J est une matrice (n,n) ${}^TJ$ sa transposée.

Soit $H \to \Lambda(H)$ la représentation matricielle de h sur a dans la base choisie, $H \to \Lambda'(H)$ celle de h sur b. Pour $X \in a$ et $X' \in b$, en identifiant les éléments et leurs représentations matricielles dans la base choisie, on a: $\beta([HX], X') = -\beta(X, [H, X'])$ $\forall H \in h$, d'où ${}^T(\Lambda(H)X)J\,X' = {}^TX\,J(\Lambda'(H)X')$ $\forall X$ et $\forall X'$. Ce qui donne ${}^T\Lambda(H)\,J = -J\,\Lambda'(H)$. Or J est inversible car la restriction de β à $a \times b$ est non dégénérée: $\beta(X, X') = 0$ $\forall X \in a \Rightarrow X' \in a^\perp \Rightarrow X' = 0$ (puisque $a^\perp \cap b = \{0\}$). D'où on a finalement $\Lambda'(H) = -J^{-1}\,{}^T\Lambda(H)\,J$, ce qui prouve que $H \to \Lambda'(H)$ est équivalente à la représentation contragrédiente de Λ.

En appliquant ce lemme, nous allons déterminer les sous-algèbres minimales g_π correspondant aux représentations indécomposables cycliques les plus simples. ■

PROPOSITION 1. *Pour tout entier impair $2n + 1$, la représentation π_n :* $\begin{array}{c} \bullet\ n+1 \\ \downarrow \\ \bullet\ n \end{array}$ *définit dans $sl(2n + 1)$ une sous-algèbre $\pi(sl(2)$. $a)$ telle que la seule sous-algèbre semi-simple minimale g_{π_n} est $g_{\pi_n} = sl(2n + 1)$.*

Soit $E = E_n \oplus E_{n+1}$ l'espace de la représentation π_n : $\begin{array}{c} \bullet\ E_{n+1} \\ \downarrow \\ \bullet\ E_n \end{array}$. Pour simplifier les notations, on identifie les éléments H, X, Y de $sl(2)$ avec les représentants $\pi_n(H), \pi_n(X), \pi_n(Y)$.

Soient H_n, X_n, Y_n (respectivement H_{n+1}, X_{n+1}, Y_{n+1}) les restrictions de H, X, Y à E_n (resp. E_{n+1}) de sorte que $H = H_n + H_{n+1}$, $X = X_n + X_{n+1}$, $Y = Y_n + Y_{n+1}$.

Soit r tel que $n = 2r + 1$, $\{e_r, e_{r-1}, \ldots, e_{-r+1}, e_{-r}\}$ une base canonique de E_n et $\{\epsilon_{r+\frac{1}{2}}, \epsilon_{r-\frac{1}{2}}, \ldots, \epsilon_{-r-\frac{1}{2}}\}$ une base canonique de E_{n+1}. On a les relations:

$$\begin{cases} H_n e_i = 2ie_i \\ H_{n+1}\epsilon_i = 2i\epsilon_i \end{cases} \qquad \begin{cases} Xe_i = X_n e_i = (r+i+1)\, e_{i+1} & i \neq r \\ Xe_r = X_n e_r = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ye_i = Y_n e_i = (r-i+1)\, e_{i-1} & i \neq -r \\ Ye_{-r} = Y_n e_{-r} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X\epsilon_i = X_{n+1}\epsilon_i = \left(r + \dfrac{3}{2} + i\right)\epsilon_{i+1} & i \neq r \\ X\epsilon_{r+\frac{1}{2}} = X_{n+1}\epsilon_{r+\frac{1}{2}} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y\epsilon_i = Y_{n+1}\epsilon_i = \left(r - i + \dfrac{3}{2}\right)\epsilon_{i-1} & i \neq -r - \dfrac{1}{2} \\ Y\epsilon_{-r-\frac{1}{2}} = Y_{n+1}\epsilon_{-r-\frac{1}{2}} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} P_1 e_i = 0\ \forall i \\ P_2 e_i = 0\ \forall i \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_1\epsilon_{r+\frac{1}{2}} = 0 \\ P_1\epsilon_i = e_{i+\frac{1}{2}} & i \neq r \end{cases} \qquad \begin{cases} P_2\epsilon_{-r-\frac{1}{2}} = 0 \\ P_2\epsilon_i = -e_{i-\frac{1}{2}} & i \neq -r \end{cases}$$

$\{H, X, Y, P_1, P_2\}$ définissent ainsi une sous-algèbre $sl(2)$. $\boldsymbol{a}$ dans $sl(2n+1)$ et on cherche une sous-algèbre semi-simple $\boldsymbol{g}$ telle que $sl(2).\ \boldsymbol{a} \subset \boldsymbol{g} \subset sl(2n+1)$.

Il résulte du Lemme 4 que $\boldsymbol{g}$ doit contenir un sous-espace b de dimension 2 indépendant de $\boldsymbol{a}$ portant une représentation irréductible de $sl(2)$. Nous devons donc chercher dans la restriction de l'adjointe de $sl(2n+1)$ à $sl(2)$, les composantes irréductibles de dimension 2. Et nous allons trouver qu'il n'y en a que deux dont $\{P_1, P_2\}$ et qu'il n'y a donc qu'une seule possiblilité pour le sous-espace $\boldsymbol{a} \oplus b$. On cherche Q_1 et Q_2 tels que $[H\,Q_1] = Q_1$ et $[\,H\,Q_2] = -Q_2$, ce qui impose pour tout vecteur propre V de H: $HV = \lambda V$ les relations $H(Q_1 V) = (\lambda+1)\,Q_1 V$ et $H(Q_2 V) = (\lambda-1)\,Q_2 V$.

Or il n'y a dans E que des sous-espace propres de dimension 1 pour H.

On en déduit qu'il existe λ_i et μ_i tels que:

$$\begin{cases} Q_1 e_i = \lambda_i\,\epsilon_{i+\frac{1}{2}} & Q_1\epsilon_i = \lambda_i\, e_{i+\frac{1}{2}} & i \neq r + \dfrac{1}{2} & Q_1\epsilon_{r+\frac{1}{2}} = 0 \\ Q_2 e_i = \mu_i\,\epsilon_{i-\frac{1}{2}} & Q_2\epsilon_i = \mu_i\, e_{i-\frac{1}{2}} & i \neq -r - \dfrac{1}{2} & Q_2\epsilon_{-r-\frac{1}{2}} = 0. \end{cases}$$

On écrit maintenant la relation $[X\,Q_1] = 0$, on en déduit

$$\begin{cases} \lambda_i X\epsilon_{i+\frac{1}{2}} = Q_1((r+i+1)\, e_{i+1}) & \forall i \neq r \\ \lambda_i (r+2+i)\, \epsilon_{i+\frac{3}{2}} = (r+i+1)\, \lambda_{i+1}\, \epsilon_{i+\frac{3}{2}} & \forall i \neq r \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \lambda_i X e_{i+\frac{1}{2}} = Q_1\left(\left(r + \frac{3}{2} + i\right) \epsilon_{i+\frac{1}{2}}\right) & \forall i \neq r + \frac{1}{2} \\ \lambda_i \left(r + i + \frac{3}{2}\right) e_{i+\frac{3}{2}} = \left(r + i + \frac{3}{2}\right) \lambda_{i+1}\, e_{i+\frac{3}{2}} & i \neq \left(r + \frac{1}{2}\right) \text{ et } \left(-r - \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

Ceci donne $\begin{cases} \lambda_{-r-\frac{1}{2}} = \lambda_{-r+\frac{1}{2}} = \ldots = \lambda_{r-\frac{1}{2}} \\ \lambda_{-r+1} = 2\lambda_{-r} \qquad \lambda_{-r+2} = \frac{3}{2}\, \lambda_{-r+1} = 3\lambda_{-r} \ldots \lambda_r = (2r+1)\lambda_{-r} \end{cases}$

De même la relation $[Y\, Q_2] = 0$ donne:

$$\mu_i (r - i + 2)\epsilon_{i-\frac{3}{2}} = (r - i + 1)\mu_{i-1}\, \epsilon_{i-\frac{3}{2}} \quad \forall i \neq -r \quad \text{et} \quad \mu_i \left(r - i + \frac{3}{2}\right) e_{i-\frac{3}{2}} =$$

$$= \left(r - i + \frac{3}{2}\right) \mu_{i-1}\, e_{i-\frac{3}{2}} \quad \forall i \neq \left(r + \frac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad \left(-r - \frac{1}{2}\right)$$

d'où $\begin{cases} \mu_{-r+\frac{1}{2}} = \mu_{-r+\frac{3}{2}} = \ldots = \mu_{r+\frac{1}{2}} \\ \mu_{r-1} = 2\mu_r \qquad \mu_{r-2} = 3\mu_r \ldots \mu_{-r} = (2r+1)\mu_r. \end{cases}$

En posant $\lambda_{-r-\frac{1}{2}} = \ldots = \lambda_{r-\frac{1}{2}} = \lambda$ et $\mu_{-r+\frac{1}{2}} = \ldots = \mu_{r+\frac{1}{2}} = \mu$, en trouve finalement

$$\begin{cases} Q_1\, e_i = \lambda_{-r}(r+i+1)\, \epsilon_{i+\frac{1}{2}} & Q_1\, \epsilon_i = \lambda e_{i+\frac{1}{2}} & \forall i \neq r + \frac{1}{2} & Q_1 \epsilon_{r+\frac{1}{2}} = 0 \\ Q_2\, e_i = \mu_r (r - i + 1)\, \epsilon_{i-\frac{1}{2}} & Q_2\, \epsilon_i = \mu e_{i-\frac{1}{2}} & \forall i \neq -r - \frac{1}{2} & Q_2 \epsilon_{-r-\frac{1}{2}} = 0 \end{cases}$$

Appelons Q_1' et Q_2' les applications définies par

$$\begin{cases} Q_1'\, e_i = (r+i+1)\, \epsilon_{i+\frac{1}{2}} \\ Q_1'\, \epsilon_i = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Q_2'\, e_i = (r-i+1)\, \epsilon_{i-\frac{1}{2}} \\ Q_2'\, \epsilon_i = 0. \end{cases}$$

On trouve alors que les éléments Q_1 et Q_2 sont de la forme

$$\begin{cases} Q_1 = \lambda_r\, Q_1' + \lambda P_1 \\ Q_2 = \mu_r\, Q_2' - \mu P_2 \end{cases} .$$

Comme $\{P_1, P_2, Q_1, Q_2\}$ doit constituer un système libre dans g, il est nécessaire que $\lambda_r\ \mu_r \neq 0$ et $Q_1' \in g$, $Q_2' \in g$.

Nous allons maintenant montrer que la sous-algèbre de Lie engendrée par H, X, Y, P_1, P_2, Q_1' et Q_2' dans $sl(2n+1)$ est $sl(2n+1)$.

Calculons $[P_1\, Q_2'] + [P_2\, Q_1']$:

$$([P_1\, Q_2'] + [P_2\, Q_1'])(e_i) = P_1((r-i+1)\epsilon_{i-\frac{1}{2}}) + P_2((r+i+1)\epsilon_{i+\frac{1}{2}}) =$$

$$= [(r-i+1)-(r+i+1)]e_i = -2ie_i \qquad \forall i \in \{-r, \ldots, +r\}$$

$$([P_1\, Q_2'] + [P_2\, Q_1'])(\epsilon_i) = -Q_2'(e_{i+\frac{1}{2}}) - Q_1'(-e_{i-\frac{1}{2}}) =$$

$$= \left[-\left(r-i+\frac{1}{2}\right)+\left(r+i+\frac{1}{2}\right)\right]\epsilon_i = 2i\epsilon_i \quad \forall i \in \left\{-r-\frac{1}{2}, \ldots, r+\frac{1}{2}\right\}$$

On obtient $[P_1\, Q_2'] + [P_2\, Q_1'] = H_{n+1} - H_n \in g$, or $H = H_n + H_{n+1} \in g$, donc H_n et H_{n+1} sont dans g. On en déduit $[H_n\, X] = X_n \in g$, $[H_n\, Y] = Y_n \in g$, $[H_{n+1}\, X] = X_{n+1} \in g$ et $[H_{n+1}\, Y] = Y_{n+1} \in g$.

Soit M_{ij} l'application de matrice M_{ij} ($a_{ij} = 1$, $a_{kl} = 0$ si $k \neq i$ ou $l \neq j$) dans la base $\{(e_i)(\epsilon_i)\}$.

On a $H_n = \sum_{i=1}^{n} (n+1-2i)M_{ii}$, $X_n = \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)M_{i,i+1}$, $P_1 = \sum_{i=1}^{n} M_{i,n+1+i}$, d'où $[H_n\, P_1] = (\operatorname{ad} H_n)\, P_1 = \sum_{i=1}^{n} (n+1-2i)M_{i,n+1+i}$ et $(\operatorname{ad} H_n)^k P_1 = \sum_{i=1}^{n} (n+1-2i)^k M_{i,n+1+i}$. Ce qui donne le système:

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ (\operatorname{ad} H_n)P_1 \\ (\operatorname{ad} H_n)^2 P_1 \\ \vdots \\ (\operatorname{ad} H_n)^{n-1} P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ (n-1) & (n-3) & \ldots & (-n+1) \\ (n-1)^2 & (n-3)^2 & \ldots & (-n+1)^2 \\ \vdots & & & \\ (n-1)^{n-1} & (n-3)^{n-1} & & (-n+1)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{1,n+2} \\ M_{2,n+3} \\ M_{3,n+4} \\ \\ M_{n,2n+1} \end{pmatrix}.$$

On a ici une matrice inversible. Donc les $M_{i,n+i+1}$, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, s'expriment comme combinaisons linéaires des $(\operatorname{ad} H)^k P_i$ qui sont dans g et sont eux-même dans g.

On a ensuite $[X_n\, P_1] = \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)M_{i,n+i+2} \in g$ d'où

$$(\mathrm{ad}\, H_n)([X_n P_1]) = \sum_{i=1}^{n-1} (n+1-2i)(n-i) M_{i,n+i+2} \qquad \text{et}$$

$$(\mathrm{ad}\, H_n)^k([X_n P_1]) = \sum_{i=1}^{n-1} (n+1-2i)^k (n-i) M_{i,n+i+2}$$

et le même raisonnement que ci-dessus permet de conclure que $M_{i,n+2+i} \in g$ $\forall i \ 1 \leqslant i \leqslant n-1$.

On itère ce raisonnement en premant les $(\mathrm{ad}\, X_n)^k P_1$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, et en leur appliquant les $(\mathrm{ad}\, H_n)^j$. On obtient ainsi $M_{i,n+i+j} \in g$, $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n+1-i$.

On peut encore faire le même raisonnement à partir de P_2 et des $(\mathrm{ad}\, Y_n)^k P_2$ en agissant par $(\mathrm{ad}\, H_n)^j$ pour montrer finalement que $M_{ij} \in g$ $1 \leqslant i \leqslant n$ et $n+1 \leqslant j \leqslant 2n+1$.

On travaille ensuite de la même manière avec Q_1', Q_2', X_{n+1}, Y_{n+1} et H_{n+1} pour montrer que $M_{ij} \in g$ pour $n+1 \leqslant i \leqslant 2n+1$ et $1 \leqslant j \leqslant n$.

Pour tous $\underset{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}{i \neq j}$, on a alors $M_{ij} = [M_{i,n+1}, M_{n+1,j}]$ et pour tous $i \neq j, n+1 \leqslant i \leqslant 2n+1$ et $n+1 \leqslant j \leqslant 2n+1$: $M_{ij} = [M_{i1}, M_{1j}] \in g$ donc $M_{ij} \in g$ $\forall i \neq j$ et par suite $g = sl(2n+1)$. ∎

REMARQUE. Si on considère la représentation π_n' $\begin{array}{l} \star\; n+1 \\ \updownarrow \\ \star\; n \end{array}$ on obtient le même résultat que pour π_n: la démonstration est la même en échangeant les rôles de P_i et Q_i'.

PROPOSITION 2. *La représentation cyclique fidèle* π: $\begin{array}{l} \star\; 3 \\ \updownarrow \\ \star\; 2 \\ \updownarrow \\ \star\; 1 \end{array}$ *de* $sl(2)$. $\boldsymbol{a}$ *définit une sous-algèbre* $sl(2)$. $\boldsymbol{a}$ *de* $sl(6)$ *telle que la seule sous-algèbre semi-simple propre qui la contienne est* $sl(3)$.

Nous allons d'abord faire la décomposition de la restriction à la sous-algèbre $sl(2)$. $\boldsymbol{a}$ définie par π, de la représentation adjointe de $sl(6)$. Ecrivons les matrices de H, X, Y, P_1, P_2:

$$H = \begin{pmatrix} 0 &&&&& \\ & 1 &&&& \\ && -1 &&& \\ &&& 2 && \\ &&&& 0 & \\ &&&&& -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 &&&&& \\ & 0 & 1 &&& \\ & 0 & 0 &&& \\ &&& 0 & 2 & 0 \\ &&& 0 & 0 & 1 \\ &&& 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 0 &&&&& \\ & 0 & 0 &&& \\ & 1 & 0 &&& \\ &&& 0 & 0 & 0 \\ &&& 1 & 0 & 0 \\ &&& 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

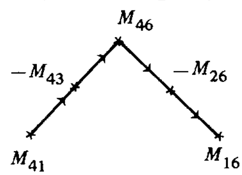
$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 &&& \\ &&& 0 & 1 & 0 \\ &&& 0 & 0 & 1 \\ &&&&& \\ &&&&& \\ &&&&& \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 &&& \\ &&& -1 & 0 & 0 \\ &&& 0 & -1 & 0 \\ &&&&& \\ &&&&& \\ &&&&& \end{pmatrix}$$

On cherche d'abord les vecteurs de poids dominant de la restriction à $sl(2)$, c'est à dire les matrices A telles que $[H\,A] = \lambda A$ et $[X\,A] = 0$. Soit $\{e_0\,e_1\,e_2\,e_3\,e_4\,e_5\}$ la base de la représentation: $He_i = \lambda_i\,e_i$ $\forall i$ $\lambda_i = 0, 1, -1, 2, 0, -2$.

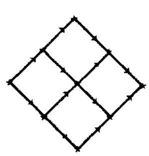
On a $[H\,M_{ij}] = (\lambda_i - \lambda_j)\,M_{ij}$. Posons $Xe_i = \mu_i\,e_{i-1}$ $X = \sum_{i=2}^{6} \mu_i\,M_{i-1,i}$, on obtient alors $[X\,M_{ij}] = \mu_i\,M_{i-1,j} - \mu_{j+1}M_{i,j+1}$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_4 = \mu_7 = 0$ $\mu_3 = \mu_6 = 1$, $\mu_5 = 2$.

On trouve ainsi les représentations de poids dominant de $sl(2)$: une de dimension 5 engendrée par M_{46}, deux de dimension 4 engendrées par M_{26} et M_{43}, quatre de dimension 3 engendrées par M_{16}, M_{23}, M_{41} et $2M_{45} + M_{56}$, quatre de dimension 2 engendrées par M_{13}, M_{21}, $M_{25} + M_{36}$ et $2M_{42} + M_{53}$ et deux de dimension 1 engendrées par $M_{22} + M_{33} - 2M_{11}$ et $M_{44} + M_{55} + M_{66} - 3M_{11}$.

Il reste à étudier l'action de ad P_1 et ad P_2 sur ces éléments. On trouve $[P_1\,M_{41}] = -M_{43}$, $[P_1\,M_{43}] = -M_{46}$, $[P_1\,M_{46}] = 0$, $[P_2\,M_{46}] = -M_{26}$, $[P_2\,M_{26}] = -M_{16}$, $[P_2\,M_{16}] = 0$ d'où le schéma



qui se complète nécessairement en:



Cherchons alors des bases des sous-espaces irréductibles par $sl(2)$ apparaissant dans ce schéma:

$[YM_{41}] = M_{51}$ $[YM_{51}] = 2M_{61}$, $[YM_{43}] = M_{53} - M_{42}$ $[Y, M_{53} - M_{42}] =$

$= 2(M_{63} - M_{52})[YM_{63} - M_{52}] = -3M_{62}$

$[YM_{46}] = M_{56} - 2M_{45}$ $[Y, M_{56} - 2M_{45}] = 2(M_{66} - 2M_{55} + M_{44})$ $[Y, M_{66} - 2M_{55} +$

$+ M_{44}] = 3(M_{54} - 2M_{65})$

$[Y, M_{54} - 2M_{65}] = 4M_{64}$, $[YM_{26}] = M_{36} - 2M_{25}$ $[Y, M_{36} - 2M_{25}] =$

$= 2(M_{24} - 2M_{35})$ $[Y, M_{24} - 2M_{35}] = M_{34}$

$[YM_{16}] = -2M_{15}$ $[Y, -2M_{15}] = 2M_{14}$

$(\mathrm{ad}\ 2P_2 - \mathrm{ad}\ P_1\ \mathrm{ad}\ Y)\, M_{41} = -3M_{21} + 2M_{42} + M_{53}$

$[Y, -3M_{21} + 2M_{42} + M_{53}] = -3M_{31} + 2M_{63} + M_{52}$

$(\mathrm{ad}\ P_2 - \mathrm{ad}\ P_1\ \mathrm{ad}\ Y)(-3M_{21} + 2M_{42} + M_{53}) = 2(M_{44} + M_{55} + M_{66} - 3M_{11})$

$-6(M_{22} + M_{33} - 2M_{11}) = A$

$(\mathrm{ad}\ P_1)A = 4(-3M_{13} + 2(M_{25} + M_{36}))$ $[Y, (\mathrm{ad}\ P_1)A] = 4(3M_{12} - 2(M_{35} + M_{24}))$

$\mathrm{ad}\ P_1(-3M_{21} + 2M_{42} + M_{53}) = 4M_{23} - (2M_{45} + M_{56})$

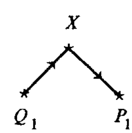
$[Y, 4M_{23} - (2M_{45} + M_{56})] = 2(2(M_{33} - M_{22}) + (M_{44} - M_{66}))$

$[Y, 4(M_{33} - M_{22}) + 2(M_{44} - M_{66})] = 2(-2M_{32} + (M_{54} + M_{65}))$.

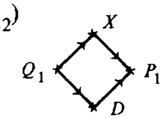
Le schéma obtenu donne une représentation de dimension 27. Il reste donc un sous-espace de dimension 8 dont la restriction à $sl(2)$ contient 1 représentation de dimension 3, deux de dimension 2 et 1 de dimension 1. Or nous connaissons un sous-espace de dimension 3, $sl(2)$ de base $\{X, H, Y\}$ tel que $(\mathrm{ad}\ P_1)X = 0$. On cherche alors un antécédent éventuel de X par ad P_1 parmi les vecteurs de valeur propre 1 pour ad H et annulés par ad X.

On trouve $\mathrm{ad}\ P_1(-2M_{21} - (2M_{42} + M_{53})) = X$ et $[Y, -2M_{21} - (2M_{42} + M_{53})] = -2M_{31} - (2M_{63} + M_{52})$.

En posant $\begin{cases} Q_1 = -2M_{21} - (2M_{42} + M_{53}) \\ Q_2 = -2M_{31} - (2M_{63} + M_{52}) \end{cases}$ on a le schéma

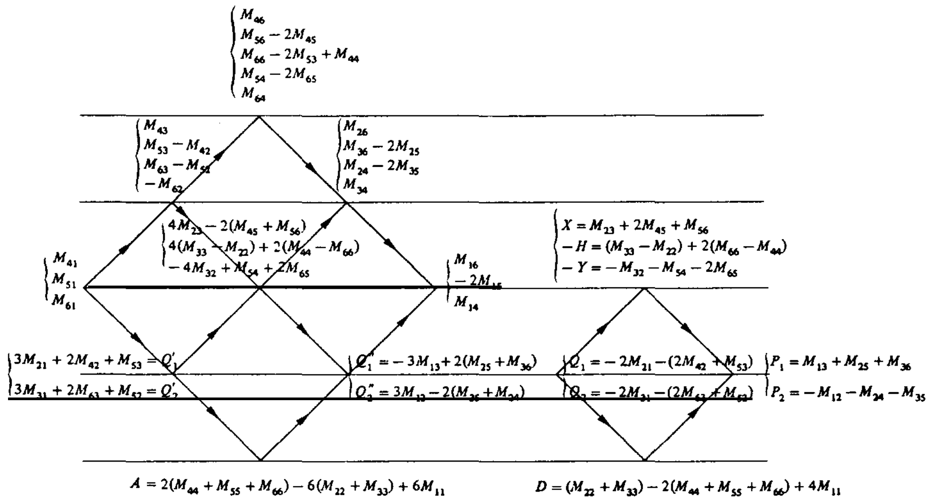


qui se complète nécessairement en:



où $D = \mathrm{ad}\ (P_2 - P_1 Y)Q_1 = (M_{22} + M_{33} - 2M_{11}) - 2(M_{44} + M_{55} + M_{66} - 3M_{11})$.

On obtient finalement que la représentation adjointe de $sl(6)$ restreinte à $\pi(sl(2).\, a)$ se décompose en la somme directe de deux indécomposables cycliques suivant le schéma:



D'après le lemme 4, une algèbre de Lie semi-simple g contenant $\pi(sl(2).\,a)$ dans $sl(6)$ doit contenir une combinaison linéaire non triviale $\alpha Q_1+\alpha' Q_1'+\alpha'' Q_1''$.

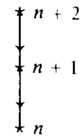
On peut envisager $\alpha'=\alpha''=0$ et on vérifie en effet que la sous-algèbre engendrée par $\{X, H, Y, P_1, P_2, Q_1, Q_2, D\}$ est $sl(3)$.

Si $\alpha''\neq 0$ ou $\alpha'\neq 0$, g contient alors $\operatorname{ad} P_1(\alpha Q_1+\alpha' Q_1'+\alpha'' Q_1'')$ donc aussi $\operatorname{ad} P_1(\alpha' Q_1'+\alpha'' Q_1'')$.

En appliquant $\operatorname{ad}(2P_1-P_1\,Y)$ à cet élément, on trouve $Q_1''\in g$ d'où $M_{16}\in g$. g contient donc M_{1i} $2\leqslant i\leqslant 6$. Or ces cinq éléments forment une sous-algèbre abelienne de g qui en serait un idéal si g ne contenait au moins un élément de $sl(6)$ ayant une composante non nulle sur l'un des éléments M_{i1}.

Puisque g est semi-simple, cet élément existe. S'il a une composante non nulle sur M_{41}, M_{51} ou M_{61}, par application de l'adjointe restreinte à $\pi(sl(2).\,a)$ on trouve que g contient tout le sous-espace de dimension 27. S'il a une composante non nulle sur M_{21} ou M_{31}, on est dans le cas où on peut supposer $\alpha'\neq 0$. Alors g contient Q_1', $(\operatorname{ad} P_1)Q_1'$, A, Q_1'', M_{16}, M_{26} et les sous-espaces qu'ils engendrent. Or M_{26} engendre un sous-espace a_{26} de dimension 4 qui est une sous-algèbre abélienne formant avec $sl(2)$ un produit semi-direct $sl(2).\,a_{26}$ auquel on peut appliquer le lemme 4. On en déduit que les sous-espaces engendrés par M_{43} et $M_{46}=(\operatorname{ad} P_1)M_{43}$ sont dans g, d'où on a $[M_{43}\,Q_2']=-3M_{41}\in g$ et g contient encore le sous-espace de dimension 27.

On a alors $[M_{43}M_{34}]=M_{44}-M_{33}\in g$, $[M_{44}-M_{33}, Q_1']=2M_{42}+M_{53}\in g$, $-3M_{21}=Q_1'-(2M_{42}+M_{53})\in g$ et $Q_1\in g$ ce qui prouve finalement que $g=sl(6)$.

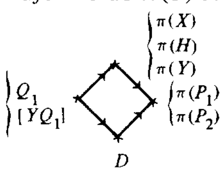
Nous venons de trouver une représentation π_n: 

se prolongeant à $sl(3)$ pour $n = 1$.

Nous allons montrer que ceci n'est vrai que pour $n = 1$.

LEMME 5. *Une représentation indécomposable π de dimension finie n de $sl(2)$. $\boldsymbol{a}$ se prolonge à $sl(3)$ si et seulement si il existe un élément Q_1 de $sl(n)$ tel que $[\pi(H)Q_1] = Q_1$, $[\pi(X)Q_1] = 0$, $[\pi(P_1)Q_1] = \pi(X)$ et $[Q_1, \pi(Y)Q_1] = 0$.*

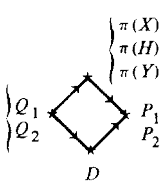
Condition nécessaire. D'après le lemme 4, il existe Q_1 dans $sl(3)$ indépendant de $\pi(P_1)$ tel que $[\pi(H)Q_1] = Q_1$ et $[\pi(X)Q_1] = 0$. On a $[\pi(P_1)Q_1] \neq 0$ sinon on aurait $\beta(\pi(P_1), Q_1) = \beta([\pi(H)\pi(P_1)], Q_1) = 0$ et $\beta(\pi(P_2), Q_1) = \beta([\pi(Y)\pi(P_1)], Q_1) = 0$ (β la forme de Killing de $sl(3)$) et Q_1 serait orthogonal à $\pi(P_1)$ et $\pi(P_2)$ ce qui contredirait le lemme 4. L'identité de Jacobi donne $[\pi(H), [\pi(P_1)Q_1]] = 2[\pi(P_1)Q_1]$. Or $\pi(X)$ est le seul élément de valeur propre 2 pour ad H dans $sl(3)$. Donc $[\pi(P_1)Q_1] = \pi(X)$ (quitte à multiplier Q_1 par une constante). La représentation adjointe de $sl(3)$ restreinte à $\pi(sl(2).\boldsymbol{a})$ correspond au schéma:



où $D = [\pi(P_2), Q_1] - [\pi(P_1), [YQ_1]]$.

Or $[Q_1[YQ_1]]$ engendre une représentation irréductible de dimension 1 de $sl(2)$, donc on a $[Q_1[YQ_1]] = \lambda D$ et quitte à remplacer Q_1 par $Q_1 - \lambda P_1$ on peut supposer $\lambda = 0$.

Réciproquement. Soit Q_1 vérifiant les conditions du Lemme. Alors Q_1 et $Q_2 = [YQ_1]$ forment une base d'un sous-espace de dimension 2 irréductible pour $sl(2)$. La représentation adjointe de $sl(n)$ restreinte à $\pi(sl(2).\boldsymbol{a})$ comprend donc la sous-représentation de schéma:



où $D = [\pi(P_1)Q_1] - [\pi(P_1)Q_2]$ et $-\pi(H) = [\pi(P_2)Q_1] + [\pi(P_1)Q_2]$ et on vérifie que $[D\pi(X)] = 0$, $[D\pi(P_1)] = 3\pi(P_1)$ et $[D\,Q_1] = -3Q_1$. ∎

PROPOSITION 3. *La seule représentation* π_n: $\begin{array}{l} n+2 \\ n+1 \\ n \end{array}$ *de* $sl(2)$. *a se prolongeant à* $sl(3)$ *est* π_1.

On utilise la notation usuelle M_{ij} dans $gl(3n+3)$. On a

$$H = \sum_{i=1}^{3n+3} \lambda_i M_{ii} = \sum_{i=1}^{n} (n-2i+1) M_{ii} + \sum_{i=1}^{n+1} (n-2i+2) M_{n+i,n+i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n+2} (n-2i+3) M_{2n+1+i,2n+1+i}$$

et $[H\, M_{ij}] = (\lambda_i - \lambda_j)\, M_{ij}$

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) M_{i,i+1} + \sum_{i=1}^{n} (n+1-i) M_{n+i,n+i+1} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n+1} (n+2-i) M_{2n+1+i,2n+2+i}$$

$$P_1 = \sum_{i=1}^{n} M_{i,n+1+i} + \sum_{i=1}^{n+1} M_{n+i,2n+2+i}.$$

On cherche Q_1 tel que $[H\, Q_1] = Q_1$. Donc Q_1 est la forme

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{n} a_i M_{i,n+1+i} + \sum_{i=1}^{n} b_i M_{n+i,i} + \sum_{i=1}^{n+1} c_i M_{n+i,2n+2+i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n+1} d_i M_{2n+1+i,n+i}$$

(combinaison des vecteurs de valeur propre 1 pour ad H) et on cherche a_i, b_i, c_i, d_i tels que $[P_1\, Q_1] = X$.

$$\sum_{i=1}^{n} [M_{k,n+1+k}, Q_1] = \sum_{k=1}^{n-1} b_{k+1} M_{k,k+1} - \sum_{k=1}^{n} b_k M_{n+k,n+1+k} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} c_{k-1} M_{k,2n+3+k}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1}[M_{n+i,2n+2+i}, Q_1] = -\sum_{k=2}^{n+1} a_{k-1} M_{k-1,2n+2+k} + $$

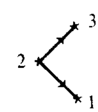
$$+ \sum_{k=1}^{n} d_{k+1} M_{n+k,n+k+1} - \sum_{k=1}^{n+1} d_k M_{2n+1+k,2n+2+k}$$

$$[P_1\, Q_1] = \sum_{k=1}^{n-1} b_{k+1} M_{k,k+1} + \sum_{k=1}^{n} (d_{k+1} - b_k) M_{n+k,n+1+k} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} (c_{k+1} - a_k) M_{k,2n+3+k} - \sum_{k=1}^{n+1} d_k M_{2n+1+k,2n+2}$$

L'identification $[P_1\, Q_1] = X$ donne: $\begin{cases} b_{i+1} = n - i & 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ d_{i+1} - b_i = n + 1 - i & 1 \leqslant i \leqslant n \\ c_{i+1} - a_i = 0 & 1 \leqslant i \leqslant n \\ -d_i = n + 2 - i & 1 \leqslant i \leqslant n \end{cases}$

d'où $b_i = n - i + 1$, $2 \leqslant i \leqslant n$ et $d_{i+1} = 2(n + 1 - i) = -(n + 1 - i)$ $\forall i$ $2 \leqslant i \leqslant n$. On doit donc avoir $n - i + 1 = 0$ $\forall i$ $2 \leqslant i \leqslant n$ et en particulier pour $i = 2$ on trouve $n = 1$. ■

PROPOSITION 4. *La représentation cyclique* π  *de* $sl(2)$. $\boldsymbol{a}$ *définit une sous-algèbre* $sl(2)$. $\boldsymbol{a}$ *de* $sl(6)$ *telle que la seule sous-algèbre propre de* $sl(6)$ *qui la contienne est* $sl(2) \oplus sl(3)$.

Les matrices de H, X, Y, P_1, P_2 dans la représnetation π sont: $H = M_{22} - M_{33} + 2(M_{44} - M_{66})$ $X = M_{23} + 2M_{45} + M_{56}$ $Y = M_{32} + M_{54} + 2M_{65}$ $P_1 = -M_{13} + 2M_{42} + M_{53}$ $P_2 = M_{12} + 2M_{63} + M_{52}$.

Nous décomposons d'abord la restriction à $\pi(sl(2).\, \boldsymbol{a})$ de l'adjointe de $sl(n)$. On cherche les représentations de poids dominant de $\pi(sl(2))$. La sous-algèbre $\pi(sl(2))$ est la même que dans la proposition 2 et il faut étudier l'action de ad P_1 et ad P_2.

$[P_1\, M_{26}] = 2M_{46}$ $[P_1\, M_{46}] = 0$ $[P_2\, M_{46}] = -2M_{43}$ $[P_1\, M_{43}] = 0$ $[P_2\, M_{43}] = 0$.

Comme $[P_1\, M_{16}] = 0$ $[P_1\, M_{23}] = 2M_{43}$ $[P_1\, M_{41}] = M_{43}$ et $[P_1, 2M_{45} + M_{56}] = -2M_{43}$.

On voit que M_{26} n'a pas d'antécédent par ad P_1 et on sait qu'il n'en a pas par ad P_2.

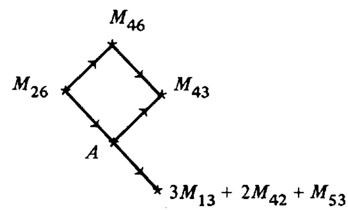
On a $3[P_2, M_{26}] - [P_1[YM_{26}]] = 2(2M_{16} - 4M_{23} + (M_{56} + 2M_{45})) = 2A$

$$[Y, A] = 2(M_{66} - M_{44} - 2(M_{33} - M_{22}) - 2M_{15})$$

$$2[P_2 A] - [P_1[YA]] = -8(3M_{13} + (2M_{42} + M_{53}))$$

$$[P_1, 3M_{13} + (2M_{42} + M_{53})] = 0 \qquad [P_2, M_{13} + (2M_{42} + M_{53})] = 0$$

Ce qui nous donne le schéma suivant:



On cherche alors un élément engendrant une représentation de dimension 1 de $sl(2)$ dont l'image par ad P_1 soit

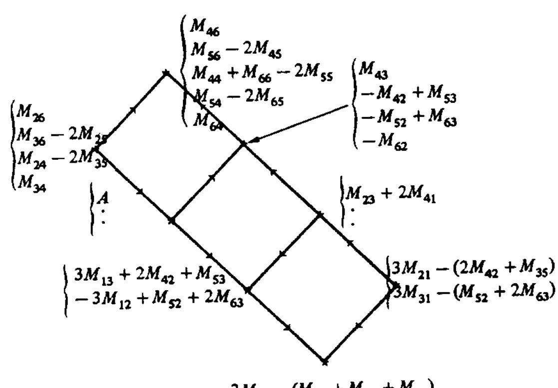
$$3M_{13} + 2M_{42} + M_{53} : [P_1, 3M_{11} - (M_{44} + M_{55} + M_{66})] = 3M_{13} + 2M_{42} + M_{53}.$$

Puis on cherche une représentation de dimension 2 de $sl(2)$ dont l'image par ad P_1 et ad P_2 contienne $3M_{11} - (M_{44} + M_{55} + M_{66})$. On cherche donc un élément B de la forme $B = \lambda_1 M_{13} + \lambda_2 M_{21} + \lambda_3(M_{25} + M_{36}) + \lambda_4(2M_{42} + M_{53})$ tel que

$$[P_2 B] - [P_1[YB]] = k(3M_{11} - (M_{44} + M_{55} + M_{66})).$$

On peut prendre $B = 3M_{21} - (2M_{42} + M_{53})$ qui vérifie $[P_1 B] = 3(M_{23} + 2M_{41})$ puis $[P_1 M_{23} + 2M_{41}] = 4M_{23}$.

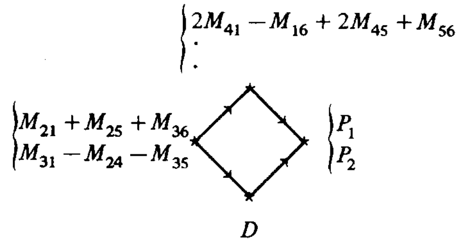
On trouve ainsi une représentation indecomposable de dimension 24 correspondant au schéma ci-contre. Et il reste à trouver un sous-espace de dimension 11 dans $sl(6)$.



On trouve $D = -2(2M_{11} - (M_{22} + M_{33})) + (3M_{11} - (M_{44} + M_{55} + M_{66}))$ engendrant une représentation de dimension 1 de $sl(2)$ tel que $[P_1 D] = 3P_1$. On cherche ensuite une représentation de dimension 2 dont l'image par ad P_1 et ad P_2 contienne D.

Le même calcul que ci-dessus pour trouver B donne $B' = M_{21} + (M_{25} + M_{36})$.

On a $[P_1, B'] = 2M_{41} - M_{16} + (2M_{45} + M_{56})$ puis $[P_1, 2M_{41} - M_{16} + (2M_{45} + M_{56})] = 0$ ce qui nous donne une représentation de dimension 8 de schéma:

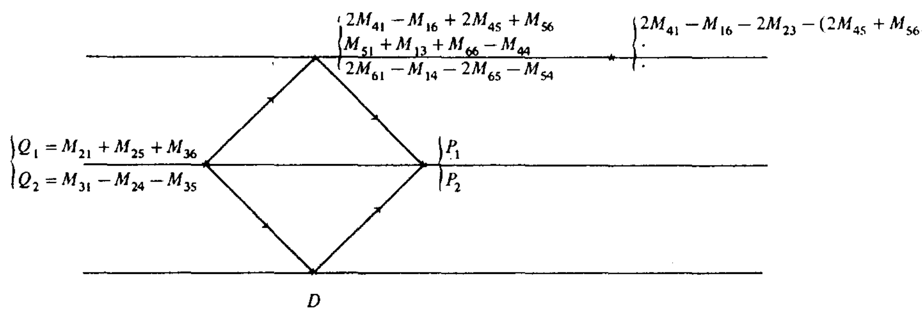


Il ne manque plus qu'un sous-espace de dimension 3. Or on a

$$[P_1 X] = 0 \qquad\qquad [P_1, 2M_{41} - M_{16} + 2M_{45} + M_{56}] = 0$$

$$[P_2 X] = -P_1 \qquad\qquad [P_2, 2M_{41} - M_{16} + 2M_{45} + M_{56}] = -2P_1$$

et on trouve une représentation irréductible de dimension 3 de $sl(2)$. $\boldsymbol{a}$ engendrée par $2M_{41} - M_{16} - 2M_{23} - (2M_{45} + M_{56})$. On trouve ainsi que le plus petit sous-espace de $sl(6)$ contenant $sl(2)$. $\boldsymbol{a}$ et une représentation de dimension 2 de $sl(2)$ vérifiant les condition du lemme 4 a pour schéma:



Et on vérifie aisément qu'on obtient ici une sous-algèbre $sl(2) \oplus sl(3)$.

Cherchons maintenant toutes les sous-algèbres semi-simples de $sl(6)$ contenant $\pi(sl(2).\ \boldsymbol{a})$. D'après le lemme 4, une algèbre semi-simple g contenant $\pi(sl(2).\ \boldsymbol{a})$ doit contenir une élément $\alpha Q_1 + \alpha' Q_1' + \alpha'' Q_1''$:

$$Q_1' = 3M_{21} - (2M_{42} + M_{53}) \qquad\qquad Q_1'' = 3M_{13} + 2M_{42} + M_{53}.$$

– Le cas $\alpha' = \alpha'' = 0$ a été étudié: on trouve $sl(2) \oplus sl(3)$.

– Si $\alpha' \neq 0$, l'élément $\alpha Q_1 + \alpha' Q_1' + \alpha'' Q_1''$ engendre, par l'action de ad P_1 et ad P_2 un sous-espace vectoriel contenant la sous-algèbre abélienne $(M_{43}, -M_{42} +$

$+M_{53}, -M_{52}+M_{63}, -M_{62}]$ qui forme avec $\pi(sl(2))$ un produit semi-direct satisfaisant les conditions du lemme 4.

La sous-algèbre semi-simple g contient donc nécessairement M_{26} et le sous-espace qu'il engendre. g contient donc les éléments $[M_{46}M_{64}] = M_{44} - M_{66}$, $[M_{44}-M_{66}, M_{36}-2M_{25}] = M_{36}$, M_{25}, $[P_1, M_{25}+M_{36}] = -M_{16}-M_{23}+(M_{56}+ + 2M_{45})$, $A = 2M_{16}-4M_{23}+(M_{56}+2M_{45})$, $X = M_{23}+(2M_{45}+M_{56})$. Donc g contient M_{16}, $[YM_{16}] = -2M_{15}$, $[YM_{15}] = -M_{14}$. En outre P_1 et Q_1'' sont dans g et donc également M_{12} et M_{13}. Finalement, g contient la sous-algèbre abèlienne $M_{12}, M_{13}, M_{14}, M_{15}, M_{16}$ qui serait un idéal abélien de g si g ne contenait au moins un élément ayant une composante non nulle sur l'un des M_{i1}. S'il s'agit de M_{21} (ou M_{31} qui s'y ramène par $[XM_{31}]$), alors g contient Q_1 et Q_2 et $g = sl(6)$. S'il s'agit de M_{41} (ou M_{51} ou M_{61}) alors g contient M_{41} lui-même et $[M_{24}-2M_{35}, M_{41}] = M_{21}$ donc $g = sl(6)$.

– Si $\alpha \neq 0, \alpha' = 0, \alpha'' \neq 0, \alpha Q_1 + \alpha'' Q_1 \in g$. Alors g contient D.

Or $[DQ_1] = 3Q_1$ et $[DQ_1''] = -3Q_1''$, donc g contient Q_1 et Q_1''.

Comme g contient P_1 et Q_1'', g contient M_{13} et $(2M_{42}+M_{53})$, donc g contient $[M_{13}, M_{51}+M_{15}+M_{66}-M_{44}] = -M_{53}$ et aussi M_{42}. D'où $3M_{43} = [X, M_{53}-M_{42}]$ appartient à g. Le même raisonnement que dans le cas $\alpha' = 0$ conduit alors à conclure que M_{26}, M_{46} puis M_{36} et M_{25} sont dans g. D'où $M_{21} \in g$, $Q_1' \in g$ et $g = sl(6)$. ■

IV. DILATATION

On cherche à répondre à la question suivante: étant donné une algèbre de Lie semi-simple g contenant $sl(2)$. a, existe-t-il dans g une dilatation D c'est à dire un élément tel que $[D, sl(2)] = 0$, $[DP_1] = P_1$, $[DP_2] = P_2$.

LEMME 1. *Si g_1 et g_2 sont deux algèbres de Lie semi-simples telles que $sl(2)$. $a \subset g_1 \subset g_2$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes:*

– *il existe une dilatation dans g_1*

– *il existe une dilatation dans g_2.*

Soit D_2 une dilatation dans g_2. La représentation adjointe de g_2 restreinte à g_1 est complètement réductible. Donc il existe h un sous-espace de g_2 supplémentaire de g_1 invariant par g_1: $\begin{cases} g_2 = g_1 \oplus h \\ [g_1\, h] \subset h. \end{cases}$

On peut alors décomposer $D_2 : D_2 = D_1 + D_3$ avec $D_1 \in g_1$ et $D_3 \in h$.

Pour tout $Z \in sl(2)$. a, on a $[D_2\, Z] = [D_1\, Z] + [D_3\, Z]$ avec $[D_1\, Z] \in g_1$, $[D_2\, Z] \in g_1$ et $[D_3\, Z] \in h$. D'où $[D_2\, Z] = [D_1\, Z]$ pour tout $Z \in sl(2)$. a et D_1 est une dilatation dès que D_2 l'est. ■

REMARQUE. Si $\mathbf{g}_1$ est semi-simple contenant $sl(2).\,\mathbf{a}$, pour savoir s'il y a une dilatation dans $\mathbf{g}_1$, il suffit donc de chercher une dilatation dans n'importe quelle algèbre de Lie semi-simple contenant $\mathbf{g}_1$. En particulier, si on considère une représentation fidèle de dimension n de $\mathbf{g}_1$: $\pi(sl(2).\,\mathbf{a}) \subset \pi(\mathbf{g}_1) \subset sl(n)$, il suffit de chercher dans $sl(n)$.

LEMME 2. *Si $\mathbf{g}_1$ est semi-simple contenant $sl(2).\,\mathbf{a}$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes:*
- *il existe une dilatation dans $\mathbf{g}_1$*
- *il existe une dilatation semi-simple dans $\mathbf{g}_1$.*

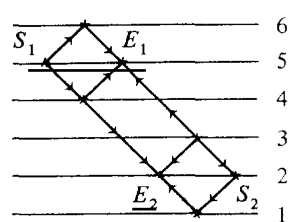
Soit D une dilatation dans $\mathbf{g}_1: D = D_S + D_N$ où $[D_S D_N] = 0$, D_S est semi-simple et D_N nilpotent. On a alors $\operatorname{ad} D = \operatorname{ad} D_S + \operatorname{ad} D_N$ et on sait que $\operatorname{ad} D_S$ et $\operatorname{ad} D_N$ sont des polynômes de $\operatorname{ad} D$ de sorte que D_S et D_N commutent avec $sl(2)$. D'autre part les sous-espaces propres de $\operatorname{ad} D_S$ sont les sous-espaces caractéristiques de $\operatorname{ad} D$ et on a $[D\,P_i] = P_i \Rightarrow [D_S P_i] = P_i$. Donc D_S est une dilatation semi-simple dans $\mathbf{g}_1$. ■

LEMME 3. *Si π est une représentation de dimension n de $sl(2).\,\mathbf{a}$ et D une dilatation dans $sl(n)$, les sous-espaces isotypiques de la restriction à $sl(2)$ sont invariants par D.*

En effet, puisque D commute avec $sl(2)$, D conserve les sous-espaces propres de $\pi(H)$ et $\pi(X)$: $\begin{cases}\pi(H)V = \lambda V \\ \pi(X)V = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\pi(H)(\pi(D)V) = \lambda V \\ \pi(X)(\pi(D)V) = 0\end{cases}$. ■

LEMME 4. *Si V est un vecteur propre de valeur propre λ pour D, alors $\pi(P_1)V$ et $\pi(P_2)V$ sont des vecteurs propres de D de valeur propre $\lambda + 1$.*

$$DV = \lambda V \Rightarrow D(P_i V) = [DP_i](V) + P_i(DV) = P_i V + P_i(\lambda V) = (\lambda + 1)P_i V.$$ ■



Nous allons maintenant donner un exemple d'une injection de $sl(2).\,\mathbf{a}$ dans $sl(35)$ tel qu'il n'existe pas de dilatation dans $sl(35)$. On considère la représentation de dimension 35 de $sl(2).\,\mathbf{a}$ correspondant au schéma ci-contre:

Il est clair que cette représentation est indécomposable puisque les sous-espaces générateurs sont tous formés de deux sources S'_1, S'_2 telles que $S'_1 = S_1 + \lambda E_1$ et $S'_2 = S_2 + \lambda E_2$ qui donnent toujours le même schéma. D'après le lemme 2 il suffit de montrer qu'il n'y a pas de dilatation diagonalisable. Soit D une dilatation diagonalisable. D'après le lemme 3, le sous-espace $S_1 \oplus E_1$ est stable par D et quitte à changer S_1 on peut supposer $D = \lambda \mathrm{Id}$ sur S_1. De même on peut supposer $D = \mu \mathrm{Id}$ sur S_2. Il résulte alors du Lemme 4 que l'on a

$$\begin{cases} D = (\lambda + 2)\ \mathrm{Id\ sur}\ E_1 \\ \\ D = (\lambda + 3)\ \mathrm{Id\ sur}\ E_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} D = (\mu + 3)\ \mathrm{Id\ sur}\ E_1 \\ \\ D = (\mu + 2)\ \mathrm{Id\ sur}\ E_2 \end{cases}$$

ce qui est impossible.

REMARQUE. Il est très facile de voir que toutes les représentations cycliques de $sl(2)$. a ainsi que celles construites dans la 2^e partie sont telles qu'il existe une dilatation relative dans l'algèbre de Lie $sl(n)$ correspondante.

REMERCIEMENTS

Les questions étudiées dans ce travail m'ont été proposées par M. Flato qui a constamment participé à leurs résolutions. Je tiens à l'en remercier ainsi que E. Angelopoulos, D. Arnal, J.P. Labesse et D. Sternheimer qui m'ont prodigué aides et conseils.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. O'RAIFEARTAIGH, *Mass differences and Lie algebras of finite order*, Phys. Rev. Letters, Vol. 14, n. 14, p. 575 - 577 (1965).
[2] M. FLATO et D. STERNHEIMER, *Remarques sur les automoprhismes causals de l'espace temps*, Compte Rendus, Acad. Sc. Paris, t. 263, p. 935 - 938 (1966).
[3] W. SCHMID, *Singular unitary representations and indefinite harmonic theory*, Lecture Notes in Physics, 153, p. 348 - 355 (1982).
[4] P. GABRIEL, *Représentations indécomposables*, Séminaire Bourbaki 1973 - 1974 n. 444 (1974).
[5] YU. F. SMIRNOV and B. GRUBER, *Indecomposable representations of the algebra su* (2, 1), L.M.P. vol. 4, n. 4, p. 367 - 380 (1980).
[6] I.M. GELFAND and V.A. PONOMAREV, *Indecomposable representations of the Lorentz group*, USP Mat. Nauk, 23, p. 3 - 60 (1968).
[7] D. PARVIZI, *Sur certaines représentations indécomposables de l'algèbre de Lie* $SL(2, \mathbb{C})$, Comptes Rendus, Acad. Sc. Paris, t. 277, p. 157 - 160 (1973).
[8] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie*, Hermann. 19.
[9] J.P. SERRE, *Algèbres de Lie semi-simples complexes*, Benjamin. 19.

Manuscript received: May 17, 1985.

Paper presented by
M. Flato